الأعداد الأولية

تعريف : نقول عن عدد طبيعي n أنه أولي إذا و فقط إذا كان له قاسمين فقط هما 1 و n $(n \neq 1)$

خاصية : لإثبات أن عدد طبيعي n أولي نتبع الخطوات التالية :

1 ــ إذا كان $\sqrt{n}$ عدد طبيعي فإن n ليس أولي .

2 ــ إذا كان $\sqrt{n}$ ليس عدد طبيعي نبحث عن المجموعة A من كل الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$

3 ــ إذا كانت كل عناصر المجموعة A لا تقسم n فإن n أولي (ماعدا 1)

4 ــ إذا وجد عنصر من المجوعة A يقسم العدد n فإن n ليس أولي .

مثال : هل العدد 341 أولي ؟

1 ــ $\sqrt{341} = 18,4$ إذن : $\sqrt{341}$ ليس عدد طبيعي .

2 ــ $A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17\}$

3 ــ بما أن العدد 11 يقسم 341 لأن $341 = 31 \times 11$ فإن 341 ليس أولي .

نشاط : n عدد طبيعي أكبر تماما من 3 . نضع $a = n^2 - 2n - 8$

هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها a عددا أوليا

الحـل : لاحظ أن : $n^2 - 2n - 8 = (n - 4)(n + 2)$ حيث $\begin{cases} (n-4) \text{ عدد طبيعي لأن } n \geq 4 \\ n+2 \text{ عدد طبيعي} \end{cases}$

إذن : العدد a يحلل إلى جداء عددين طبيعيين هما $(n + 2)$ و $(n - 4)$

إذن : حتى يكون a أولي يجب أن يكون $\begin{cases} n - 4 = 1 \\ n + 2 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} n = 5 \\ 7 \text{ أولي (محقق)} \end{cases}$

نتيجة : يكون a أولي إذا و فقط إذا كان $n = 5$

ملاحظة :

- ✓ العدد 0 ليس أولي
- ✓ 1 ليس أولي لأن العدد 1 له قاسم واحد فقط هو نفسه .
- ✓ العدد 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد .
- ✓ مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية غير منتهية أصغر عنصر منها هو 2
  و من بينها : $2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23.....$

مبرهنة : كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية بطريقة وحيدة .

مثال : 24 ليس أولي إذن يمكن تحليل 24 كمايلي $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

نتيجة مباشرة : a و b عددان طبيعيان حيث $a > 1$ و $b > 1$

يكون b قاسما لــ a إذا و فقط إذا كانت كل العوامل الأولية في تحليل b توجد في تحليل العدد a بشرط أن يكون الأس في b أصغر أو يساوي الأس في a

مثلا : $72 = 2^3 \times 3^2$

$18 = 2 \times 3^2$

لاحظ أن كل عوامل تحليل 18 توجد في تحليل 72 بأس أصغر من الأس الذي يظهر في تحليل 72 إذن : 18 يقسم 72

نشاط : البحث عن قواسم عدد طبيعي إنطلاقا من تحليله إلى عوامل أولية

ليكن n عدد طبيعي يحلل إلى جداء عوامل أولية كمايلي :

$n = a_1^{b_1} \times a_2^{b_2} \times .... \times a_p^{b_p}$ حيث a_1 ، a_2 ، .... a_p أعداد طبيعية أولية متمايزة مثنى مثنى و b_1 ؛ b_2 ؛ .... ؛ b_p أسس طبيعية

عدد قواسم العدد n هو الجداء $(b_1 + 1)(b_2 + 1) ..... (b_p + 1)$

مثال : $n = 735$

بإجراء التحليل : $735 = 3 \times 5 \times 7^2$

735	3
245	5
49	7
7	7
1	

إذن : عدد قواسم 735 هو $12 = (1 + 1)(1 + 1)(2 + 1)$

البحث عنها :

3	5	7	الجداء
3^0	5^0	7^0	1
		7^1	7
		7^2	49
	5^1	7^0	5
		7^1	35
		7^2	245
3^1	5^0	7^0	3
		7^1	21
		7^2	147
	5^1	7^0	15
		7^1	105
		7^2	735

نتيجة : قواسم العدد 735 هي $\{1 ; 7 ; 49 ; 5 ; 35 ; 245 ; 3 ; 21 ; 147 ; 15 ; 105 ; 735\}$ و عددها 12

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين غير معدومين

تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . نسمي M_a مجموعة مضاعفات العدد a و M_b مجموعة مضاعفات العدد b

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b .

أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

و نرمز له بـــ $PPCM(a ; b)$

ملاحظات : الرمز PPCM يعني plus petit commun multiple

$PPCM(a ; a) = a$

$PPCM(1 ; a) = a$

أمثلة : مضاعفات 6 هي $\{0 ; 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30 ; 36 ; 42 ; .....\}$

مضاعفات 8 هي $\{0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; .....\}$

المضاعفات المشتركة لـــ 6 و 8 هي $\{0 ; 24 ; 48 ; 72 ; .....\}$

إذن : $PPCM(6 ; 8) = 24$

تمديد : إذا كان a ، b عددان صحيحان فإن $PPCM(a ; b) = PPCM(|a| ; |b|)$

خاصية أساسية : a و b عددان طبيعيان غير معدومين

إذا كان k عدد صحيح غير معدوم فإن $PPCM(k\,a ; k\,b) = |k| \times PPCM(a ; b)$

نشاط : عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $PPCM(56 ; a) = 280$

الحـــل : 280 مضاعف لـــ a إذن : a يقسم 280

لنبحث عن قواسم العدد 280 باستعمال التحليل :

280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

إذن : $280 = 2^3 \times 5 \times 7$

إذن : a يكتب من الشكل $2^x \times 5^y \times 7^z$ حيث $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ ؛ $y \in \{0 ; 1\}$ ، $z \in \{0 ; 1\}$

بما أن $PPCM(56 ; a) \neq 56$ فإن a لا يقسم 56

إذن : $y = 1$ لأن 5 لا يقسم 56

منه : القيم الممكنة لـــ a هي كمايلي :

$\{5 ; 35 ; 10 ; 70 ; 20 ; 140 ; 40 ; 280\}$

2	7	5	A
2^0	7^0	5^1	5
	7^1	5^1	35
2^1	7^0	5^1	10
	7^1	5^1	70
2^2	7^0	5^1	20
	7^1	5^1	140
2^3	7^0	5^1	40
	7^1	5^1	280

تمرين : n عدد طبيعي غير معدوم .

a و b عددان طبيعيان حيث : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n)$ و $b = 11^n(3^{n+1} - 3^n)$

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

الحـــل : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n) = 3^n \times 11^n(11^2 - 1) = (3 \times 11)^n \times 120$

$b = 11^n(3^{n+1} - 3^n) = 11^n \times 3^n(3 - 1) = (3 \times 11)^n \times 2$

منه : $ppcm(a ; b) = ppcm(33^n \times 120 ; 33^n \times 2) = 33^n \times ppcm(120 ; 2)$

إذن : $ppcm(a ; b) = 120 \times 33^n$ لأن $ppcm(120 ; 2) = 120$

القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر :

للبحث عن القاسم المشترك الاكبر أو المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b نتبع الطريقة التالية :

1 ــ نحلل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية بأسس طبيعية

2 ــ القاسم المشترك الأكبر لــ a و b هو جداء العوامل المشتركة فقط مأخوذة بأصغر أس .

3 ــ المضاعف المشترك الأصغر لــ a و b هو جداء كل العوامل مأخوذة بأكبر أس .

أمثلة : $a = 560$ ؛ $b = 288$

560	2
280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

إذن : $560 = 2^4 \times 5 \times 7$

$288 = 2^5 \times 3^2$

يوجد عامل مشترك واحد فقط هو 2 و أسه الأصغر هو 4

$PGCD(560 ; 288) = 2^4 = 16$

العوامل التي تظهر في تحليل العددين هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7

و أسسها الكبرى على الترتيب 5 ، 2 ، 1 ، 1

إذن : $ppcm(560 ; 288) = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$

خاصية أساسية :

a و b عددان طبيعيان حيث $a > 1$ و $b > 1$

$pgcd(a ; b) \times ppcm(a ; b) = a \times b$

مثال : عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\begin{cases} a\,b = 18000 \\ ppcm(a ; b) = 600 \end{cases}$

الحـــل : $a\,b = pgcd(a ; b) \times ppcm(a ; b)$

إذن : $pgcd(a ; b) = \dfrac{a\,b}{ppcm(a ; b)}$

أي $pgcd(a ; b) = \dfrac{18000}{600} = 30$

نضع $a = 30\,x$ و $b = 30\,y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $a\,b = 18000$ تكافئ $30\,x \times 30\,y = 18000$

تكافئ $x\,y = 20$

تكافئ $(x ; y) \in \{(1 ; 20) ; (4 ; 5) ; (5 ; 4) ; (20 ; 1)\}$

نتيجة : $(a ; b) \in \{(30 ; 600) ; (120 ; 150) ; (150 ; 120) ; (600 ; 30)\}$

مبرهنة بيزو

يكون عددان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان α و β حيث $a\alpha + b\beta = 1$

مثال : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$5(4\,n - 3) - 4(5\,n - 4) = 20\,n - 15 - 20\,n + 16 = 1$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (5 ; -4)$ من الأعداد الصحيحة تحقق $\alpha(4n-3) + \beta(5n-4) = 1$

منه : العددان $(5n-4)$ و $(4n-3)$ أوليان فيما بينهما .

خواص أساسية :

1 ـــ كل عدد أولي a هو أولي مع كل الأعداد ماعدا مضاعفاته

2 ـــ إذا كان $pgcd(a ; b) = d$ فإن توجد ثنائية $(\alpha ; \beta)$ من $Z \times Z$ تحقق : $\alpha a + \beta b = d$

3 ـــ إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع الجداء bc

مبرهنة غوص :

a ، b ، c أعداد صحيحة غير معدومة

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أولي مع b فإن a يقسم c

تطبيق المبرهنة :

1 ـــ تحقق أن الثنائية $(4 ; 2)$ هي حل للمعادلة ذات المجهولين x ، y التالية :

(E)......... $9x - 16y = 4$

2 ـــ إستنتج كل حلول المعادلة (E) في المجموعة $Z \times Z$

الحـــل :

1 ـــ من أجل $(x ; y) = (4 ; 2)$ نحصل على : $9(4) - 16(2) = 36 - 32 = 4$

إذن : فعلا الثنائية $(4 ; 2)$ هي حل للمعادلة (E)

2 ـــ لتكن الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) إذن : $9x - 16y = 4$

لكن : $9(4) - 16(2) = 4$

إذن : $9x - 16y = 9(4) - 16(2)$

منه : $9(x) - 9(4) = 16y - 16(2)$

أي : $9(x-4) = 16(y-2)$

إذن : 16 يقسم الجداء $9(x-4)$

بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $(x-4)$

أي : $x - 4 = 16k$ حيث $k \in Z$

منه : $x = 16k + 4$

نعوض x بـــ $16k + 4$ في المعادلة (E) : $9(16k+4) - 16y = 4$

أي : $9 \times 16k + 36 - 16y - 4 = 0$

أي : $9 \times 16k + 32 = 16y$

أي : $y = 9k + 2$

نتيجة : حلول المعادلة (E) في المجموعة $Z \times Z$ هي الثنائيات $(x ; y)$ **حيث** $x = 16k + 4$ و $y = 9k + 2$ حيث k عدد صحيح

خواص : a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة

1 ـــ إذا كان p عدد طبيعي أولي يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو **p** يقسم b

2 ـــ إذا كان $\begin{cases} a \text{ مضاعف } b \\ a \text{ مضاعف } c \\ b \text{ و } c \text{ أوليان فيما بينهما} \end{cases}$ فإن a مضاعف للجداء bc

تطبيق : **n عدد طبيعي . نضع $A = n(5n+1)(13n+1)$**

برهن أن A يقبل القسمة على 6

الحـــل : يمكن إثبات أن A مضاعف 6 كمايلي : $\begin{cases} (1) \text{ نثبت أن } A \text{ مضاعف } 2 \\ (2) \text{ نثبت أن } A \text{ مضاعف } 3 \end{cases}$

نتيجة : بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A مضاعف 2×3

هل A مضاعف 2 ؟

إذا كان n زوجي فإن A مضاعف 2 لأن $A = n(5n+1)(13n+1)$

إذا كان n فردي فإن $(5n+1)$ زوجي إذن : A مضاعف 2

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن A مضاعف 2

هل A مضاعف 3 ؟

إذا كان n مضاعف 3 فإن A مضاعف 3 لأن $A = n(5n+1)(13n+1)$

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن $5n + 1 = 15k + 6 = 3(5k + 2)$ إذن : $5n + 1$ مضاعف 3

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن $13n + 1 = 39k + 27 = 3(13k + 9)$ إذن : $13n + 1$ مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن A مضاعف 3

خلاصة : A مضاعف 2 ، A مضاعف 3 ، 2 و 3 أوليان فيما بينهما ؛ إذن : A مضاعف 6

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

عين قائمة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100

الحـل ــ 1

لتكن A مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100

$A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97\}$

التمرين ــ 2

1 ــ ما هو عدد عمليات القسمة التي يمكن إجراؤها على الأعداد الأولية المتتابعة لمعرفة ما إذا كان العدد 1429 أوليا أم لا ؟

2 ــ بين أن العدد 1429 أولي

الحـل ــ 2

1 ــ لدينا $\sqrt{1429} \approx 37,8$

قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 38 هي $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37\}$

إذن : عدد عمليات القسمة التي يمكن إجراؤها هو 12 (عدد الأعداد الأولية الأصغر من 38)

2 ــ بإجراء القسمة الإقليدية للعدد 1429 على كل من الأعداد الأولية الأصغر من 38 لا نجد أي قاسم له إذن : 1429 أولي

التمرين ــ 3

أثبت أن العدد 853 أولي

الحـل ــ 3

$\sqrt{853} \approx 29,2$ منه جدول بواقي قسمة 853 على الأعداد الأولية الأصغر من 30

n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
$853 \equiv ?[n]$	1	1	3	6	6	8	3	17	2	12

نتيجة : كل الأعداد الأولية الأصغر من 30 لا تقسم 853 إذن : 853 أولي

التمرين ــ 4

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إذ كان العدد أوليا أم لا

251 341 1023

الحـل ــ 4

$\sqrt{251} \approx 15,84$

n	2	3	5	7	11	13
$251 \equiv ?[n]$	1	2	1	6	9	4

إذن : العدد 251 أولي

$\sqrt{341} \approx 18,4$

n	2	3	5	7	11	13	17
$341 \equiv ?[n]$	1	2	1	5	0	3	1

$341 \equiv 0[11]$ إذن : 341 ليس أولي .

$\sqrt{1023} \approx 31,98$

n	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$1023 \equiv ?[n]$	1	0	نتوقف						

$1023 \equiv 0[3]$ إذن : 1023 ليس أولي

<u>التمرين ــ5</u>

تعرف على الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية :

4163 ، 1549 ، 3411 ، 1933 ، 3705 ، 937

<u>الحـل ــ 5</u>

$\sqrt{4163} = 64,52$ ، $\sqrt{1549} = 39,35$ ، $\sqrt{3411} = 58,4$ ، $\sqrt{1933} = 43,9$ ، $\sqrt{937} = 30,61$

منه الجدول التالي :

n	937	1933	3411	1549	4163
2	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	2
5	2	3	توقف	4	3
7	6	1		2	5
11	2	8		9	5
13	1	9		2	3
17	2	12		2	15
19	6	14		10	2
23	17	1		8	0
29	9	19		12	توقف
31		11		30	
37		9		32	
41		6			
43		41			

نتيجة :

االأعداد الأولية هي :

1549 ، 1933 ، 937

3411 ليس أولي لأنه مضاعف 3

4163 ليس أولي لأنه مضاعف 23

3705 ليس أولي لأنه مضاعف 5

<u>التمرين ــ 6</u>

n عدد طبيعي أصغر من 150 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الستة الأولى

هل العدد n أولي ؟

<u>الحـل ــ 6</u>

$\sqrt{150} = 12,2$ إذن : $\sqrt{n} \le 12,2$

الأعداد الأولية الأصغر من 12 هي $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11\}$

بما أن n لا يقبل القسمة على هذه الأعداد فان n أولي .

<u>التمرين ــ 7</u>

برهن أن إذا كان n عددا طبيعيا أوليا فإن $(n + 7)$ ليس أولي.

<u>الحـل ــ 7</u>

n عدد طبيعي أولي إذن : إما $n = 2$ أو n فردي كمايلي :

الحالة الأولى : $n = 2$ إذن : $n + 7 = 9$ منه $(n + 7)$ ليس أولي .

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2k + 1$ منه $n + 7 = 2k + 1 + 7$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

أي : $n + 7 = 2(k + 4)$

منه : 2 يقسم $(n + 7)$

إذن : $(n + 7)$ ليس أولي .

التمرين ــ 8

n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 3

1 ــ برهن أن n يكتب من الشكل $3k+1$ أو $3k-1$ مع $k \in IN^*$

2 ــ هل العكس صحيح ؟

الحـل ــ 8

1 ــ n عدد طبيعي أولي و $n > 3$ إذن : n لا يقبل القسمة على 3

منه : إما $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

أي : إما $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ حيث $k \in IN^*$

إذا كان $n = 3k+2$ فإن $n = 3k+2-3+3$

أي $n = 3(k+1)-1$

أي $n = 3k'-1$ حيث $k' = k+1$

خلاصة : إما $n = 3k+1$ أو $n = 3k-1$

2 ــ العكس ليس صحيح . مثال : $22 = 3(7)+1$ لكن 22 ليس أولي .

$32 = 3(11)-1$ لكن 32 ليس أولي .

التمرين ــ 9

ليكن n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 6

1 ــ برهن أن n يكتب على أحد الأشكال التالية : $n = 12k+1$ أو $n = 12k+5$

أو $n = 12k-5$ أو $n = 12k-1$ حيث $k \in IN$

2 ــ ليكن $p = n^2 + 11$. باستعمال البرهان بفصل الحالات عين باقي قسمة p على 24

الحـل ــ 9

1 ــ n أولي إذن : n لا يقبل القسمة على 12 منه n يكتب على أحد الأشكال التالية :

$n = 12k+1$

$n = 12k+2$ أي $n = 2(6k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+3$ أي $n = 3(4k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+4$ أي $n = 4(3k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+5$

$n = 12k+6$ أي $n = 6(2k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+7$ أي $n = 12(k+1)-5$ أي $n = 12k'-5$ حيث $k' = k+1$

$n = 12k+8$ أي $n = 4(3k+2)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+9$ أي $n = 3(4k+3)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+10$ أي $n = 2(6k+5)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+11$ أي $n = 12(k+1)-1$ أي $n = 12k'-1$ حيث $k' = k+1$

نتيجة : n يكتب على أحد الأشكال التالية : $n = 12k+1$ ؛ $n = 12k+5$ ؛ $n = 12k-5$ ؛

$n = 12k-1$ حيث $k \in IN$

2 ــ لندرس الحالات الأربعة الممكنة للعدد الأولي n كمايلي :

الحالة الأولى : $n = 12k+1$ إذن : $n^2 = 144k^2 + 24k + 1$

منه : $p = n^2 + 11 = 144k^2 + 24k + 12$

لدينا $\begin{cases} 144k^2 \equiv 0[24] \\ 24k \equiv 0[24] \\ 12 \equiv 12[24] \end{cases}$

منه : $144k^2 + 24k + 12 \equiv 12[24]$

إذن : $p \equiv 12[24]$

الحالة الثانية : $n = 12k+5$ منه $n^2 = 144k^2 + 120k + 25$

إذن : $p = 144k^2 + 120k + 36$

منه : $p \equiv 36[24]$

أي $p \equiv 12[24]$

الحالة الثالثة : $n = 12k-5$ منه $n^2 = 144k^2 - 120k + 25$

إذن : $p = 144\,k^2 - 120\,k + 36$

منه : $p \equiv 36[24]$

أي $p \equiv 12[24]$

الحالة الرابعة : $n = 12\,k - 1$ إذن : $n^2 = 144\,k^2 - 24\,k + 1$

منه : $p = 144\,k^2 - 24\,k + 12$

إذن : $p \equiv 12[24]$

نتيجة : من أجل كل قيمة للعدد الأولي n فإن باقي قسمة p على 24 هو 12

التمرين ـــ 10

n عدد طبيعي اولي أكبر تماما من 3

1 ـــ برهن أن $8\,n - 1$ يوانق 0 أو 1 بترديد 3

2 ـــ إستنتج أن إذا كان العدد $8\,n - 1$ أولي فإن العدد $8\,n + 1$ ليس أولي .

الحـل ـــ 10

1 ـــ n عدد أولي إذن : لا يقبل القسمة على 3 منه
$\begin{cases} n \equiv 1[3] & \text{إما} \\ n \equiv 2[3] & \text{أو} \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} 8\,n \equiv 8[3] & \text{إما} \\ 8\,n \equiv 16[3] & \text{أو} \end{cases}$

أي $\begin{cases} 8\,n \equiv 2[3] & \text{إما} \\ 8\,n \equiv 1[3] & \text{أو} \end{cases}$

منه $\begin{cases} 8\,n - 1 \equiv 1[3] & \text{إما} \\ 8\,n - 1 \equiv 0[3] & \text{أو} \end{cases}$

2 ـــ حسب السؤال (1) فإن إذا كان $8\,n - 1$ أولي فإن $8\,n - 1 \equiv 1[3]$ (لا يقبل القسمة على 3)

منه $8\,n - 1 + 2 \equiv 1 + 2[3]$

أي $8\,n + 1 \equiv 0[3]$

إذن : $8\,n + 1$ ليس أولي لأنه يقبل القسمة على 3

التمرين ـــ 11

ليكن p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 5

برهن أن إذا كان $p + 2$ عدد أولي فإن $p + 1$ يقبل القسمة على 6

الحـل ـــ 11

p أولي و $p \geq 5$ إذن : $\begin{cases} p \text{ لا يقبل القسمة على } 2 \\ p \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \end{cases}$

منه p لا يقبل القسمة على 6

أي $\begin{cases} p = 6\,k + 1 & \text{إما} \\ p = 6\,k + 5 & \text{أو} \end{cases}$

أي $\begin{cases} p + 2 = 6\,k + 3 & \text{إما} \\ p + 2 = 6\,k + 7 & \text{أو} \end{cases}$

أي إما $p + 2 = 3(2\,k + 1)$ مرفوض لأن $p + 2$ أولي

أو $p + 2 = 6\,k' + 1$ حيث $k' = k + 1$

نتيجة : إذا كان $\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p + 2 \text{ أولي} \end{cases}$ فإن $p + 2 = 6\,k + 1$

إذن : $p + 1 = 6\,k$

منه : $p + 1$ يقبل القسمة على 6

التمرين ـــ 12

n عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 3

برهن أن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

الحـل ـــ 12

لندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد $n^2 - 1$ على 8 كمايلي :

$n \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$n^2 - 1 \equiv ?[8]$	7	0	3	0	7	0	3	0

نتيجة : إذا كان n فردي فإن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

بما أن n أولي و $n \geq 3$ فإن n فردي إذن : $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

التمرين ــ 13

n عدد طبيعي حيث $n \geq 5$

1 ــ برهن أن أحد من الأعداد التالية : $n+1$ ؛ $n+3$ ؛ $n+7$ ؛ $n+9$ ؛ $n+13$ ؛ $n+15$ يقبل القسمة على 5

2 ــ هل توجد قيم لــ n حتى تكون كل الأعداد المقترحة أولية ؟

الحــل ــ 13

1 ــ n عدد طبيعي و $n \geq 5$ إذن :
- إما $n \equiv 0[5]$ منه $n + 15 \equiv 0[5]$
- أو $n \equiv 1[5]$ منه $n + 9 \equiv 0[5]$
- أو $n \equiv 2[5]$ منه $n + 3 \equiv 0[5]$ و $n + 13 \equiv 0[5]$
- أو $n \equiv 3[5]$ منه $n + 7 \equiv 0[5]$
- أو $n \equiv 4[5]$ منه $n + 1 \equiv 0[5]$

2 ــ لا توجد أي قيمة لــ n تجعل كل الأعداد المقترحة أولية لأن من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي n فإن أحد هذه الأعداد يقبل القسمة على 5 فإذن ليس أولي.

التمرين ــ 14

n عدد طبيعي . نضع $a = n^2 + 3n + 2$

هل توجد قيم للعدد الطبيعي r حتى يكون a أولي ؟

الحــل ــ14

لاحظ أن : $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

إذن : العدد a يقبل دائما تحليلا من الشكل $a = (n+1)(n+2)$

منه : يكون a أولي إذا و فقط إذا كان $n+1 = 1$ و $n+2$ أولي أو $n+2 = 1$ و $n+1$ أولي

أي $n = 0$ و 2 أولي أو $n = -1$ و 0 أولي مرفوض

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لــ n تجعل العدد a أولي و هي $n = 0$ منه $a = 2$

التمرين ــ 15

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولي .

الحــل ــ 15

ليكن n عدد طبيعي . $n^2 + 8n + 15 = (n+3)(n+5)$

بما أن $n + 5 > 1$ و $n + 3 > 1$ فإن العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولي لأنه يقبل تحليل على الأقل من الشكل $(n+3)(n+5)$

التمرين ــ 16

n عدد طبيعي غير معدوم . نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ..... \times n$

ليكن b عدد طبيعي حيث $2 \leq b \leq 2007$. نضع $a = 2007! + b$

1 ــ برهن أن العدد a ليس أولي .

2 ــ إستنتج قائمة لــ 2006 عددا طبيعيا متتابعا ليس أوليا

الحــل ــ 16

1 ــ $2007! = 1 \times 2 \times ..... \times b \times .... \times 2007$ لأن $2 \leq b \leq 2007$

إذن : b يقسم $2007!$ و b يقسم b منه b يقسم $2007! + b$

أي b يقسم a

منه a ليس أولي

2 ــ من أجل القيم 2 ، 3 ، 4 ، .... 2007 للعدد b نحصل على القائمة التالية :
2 + ! 2007 ؛ 3 + ! 2007 ؛ 4 + ! 2007 ؛ ..... 2007 + ! 2007 و هي قائمة من 2006 عدد طبيعي متتابع ليس أولي .

التمرين ــ 17

1 ــ تحقق أن العدد 173 أولي .

2 ــ عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 173$

3 ــ p عدد طبيعي اولي فردي . عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = p$

الحـل ــ 17

1 ــ $\sqrt{173} = 13{,}1$

n	2	3	5	7	11	13
$173 \equiv ?[n]$	1	2	3	5	8	4

نتيجة : 173 لا يقبل أي قاسم أولي أصغر من 13 إذن : 173 عدد أولي

2 ــ $x^2 - y^2 = 173$ يكافئ $(x - y)(x + y) = 173$

يكافئ $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 173 \end{cases}$ لأن التحليل الوحيد الممكن للعدد 173 هو 1×173 و $x - y < x + y$

يكافئ $\begin{cases} 2x = 174 \\ y = x - 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 87 \\ y = 86 \end{cases}$

3 ــ p أولي إذن : التحليل الوحيد الممكن للعدد p هو $p = 1 \times p$
منه : $x^2 - y^2 = p$ تكافئ $(x - y)(x + y) = p$

تكافئ $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = p \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2x = p + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} \\ y = \dfrac{p+1}{2} - 1 \end{cases}$ (p فردي إذن p + 1 زوجي)

إذن : الثنائية الوحيدة التي تحقق $x^2 - y^2 = p$ هي $\left(\dfrac{p+1}{2} ; \dfrac{p+1}{2} - 1\right)$
حذار ! نبحث عن الأعداد x و y في IN فقط .

التمرين ــ 18

b عدد طبيعي

1 ــ أنشر الجداء $(b^2 - b + 1)(b^2 + b + 1)$

2 ــ ليكن a عدد صحيح . هل يمكن أن يكون العدد $a^4 + a^2 + 1$ أولي ؟

الحـل ــ 18

1 ــ $(b^2 - b + 1)(b^2 + b + 1) = b^4 + b^3 + b^2 - b^3 - b^2 - b + b^2 + b + 1$
$= b^4 + b^2 + 1$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن العدد $a^4 + a^2 + 1$ يحلل إلى $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$
إذن : يكون $a^4 + a^2 + 1$ أولي في إحدى الحالتين التاليتين فقط :

الحالة الأولى : $\begin{cases} a^2 - a + 1 = 1 \\ a^2 + a + 1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a^2 - a = 0 \\ a^2 + a + 1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a = 0 \text{ أو } a = 1 \\ a^2 + a + 1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a = 0 \text{ و } 1 \text{ أولي مرفوض} \\ \text{أو} \\ a = 1 \text{ و } (1 + 1 + 1) \text{ أولي (محقق)} \end{cases}$

الحالة الثانية : $\begin{cases} a^2 + a + 1 = 1 \\ a^2 - a + 1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a^2 + a = 0 \\ a^2 - a + 1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a = 0 \text{ أو } a = -1 \\ a^2 - a + 1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a = 0 \text{ و } 1 \text{ أولي مرفوض} \\ \text{أو} \\ a = -1 \text{ و } (1 + 1 + 1) \text{ أولي (محقق)} \end{cases}$

نتيجة : يكون العدد $a^4 + a^2 + 1$ أوليا إذا و فقط إذا كان $a = 1$ أو $a = -1$

التمرين – 19

عين كل القواسم الموجبة للأعداد التالية :

360   400   1980   121

الحـل – 19

360	
360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

400	
400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

1980	
1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

121	
121	11
11	11
1	

منه : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ إذن : عدد قواسم 360 هو $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$

$400 = 2^4 \times 5^2$ إذن : عدد قواسم 400 هو $(4 + 1)(2 + 1) = 15$

$1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ إذن : عدد قواسم 1980 هو $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$

$121 = 11^2$ إذن : عدد قواسم 121 هو $(2 + 1) = 3$

تعيين قواسم 360

A

1   2   4   8

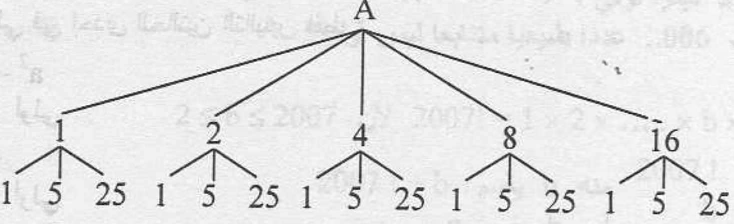
1 3 9   1 3 9   1 3 9   1 3 9

1 5 1 5 1 5   1 5 1 5 1 5   1 5 1 5 1 5   1 5 1 5 1 5

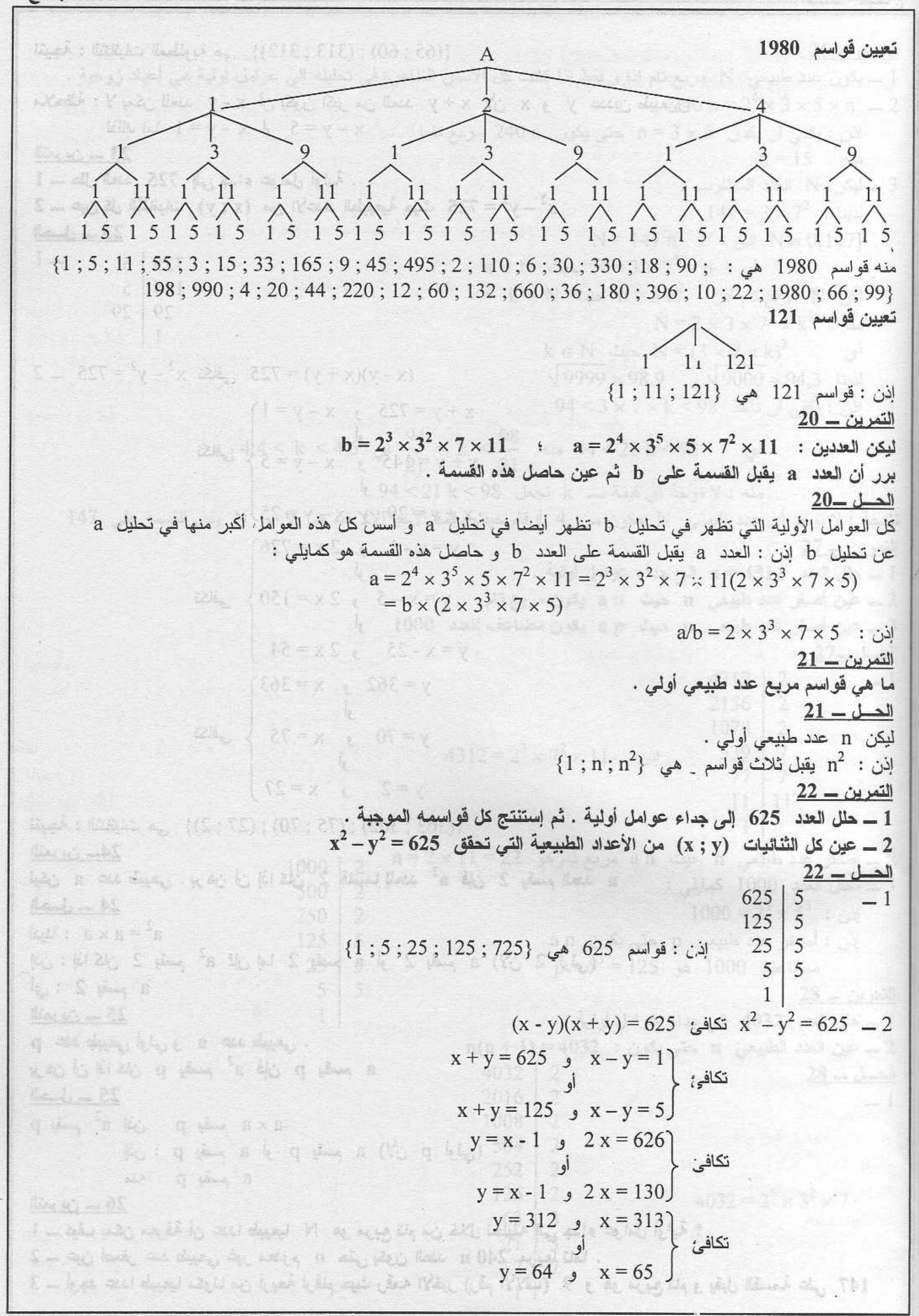
منه قواسم 360 هي : {1 ; 5 ; 3 ; 15 ; 9 ; 45 ; 2 ; 10 ; 6 ; 30 ;18 ; 90 ;4 ; 20 ; 12 ; 60 ; 36 ; 180 ; 8 ; 40 ; 24 ; 120 ; 72 ; 360}

ملاحظة : للحصول على القواسم نقوم بالصعود من أوراق الشجرة المرسومة إلى الجذر A و ذلك بإجراء عملية الجداء

تعيين قواسم 400



منه قواسم 400 هي : {1 ; 5 ; 25 ; 2 ; 10 ; 4 ; 50 ; 20 ; 100 ; 8 ; 40 ; 200 ; 16 : 80 ; 400}



تعيين قواسم 1980

A

1 2 4

1 3 9 1 3 9 1 3 9

1 11 1 11 1 11 1 11 1 11 1 11 1 11 1 11 1 11

1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5 1 5

منه قواسم 1980 هي : $\{1 ; 5 ; 11 ; 55 ; 3 ; 15 ; 33 ; 165 ; 9 ; 45 ; 495 ; 2 ; 110 ; 6 ; 30 ; 330 ; 18 ; 90 ;$
$198 ; 990 ; 4 ; 20 ; 44 ; 220 ; 12 ; 60 ; 132 ; 660 ; 36 ; 180 ; 396 ; 10 ; 22 ; 1980 ; 66 ; 99\}$

تعيين قواسم 121

1 11 121

إذن : قواسم 121 هي $\{1 ; 11 ; 121\}$

<u>**التمرين ــ 20**</u>

ليكن العددين : $a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11$ ؛ $b = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$

برر أن العدد a يقبل القسمة على b ثم عين حاصل هذه القسمة .

<u>**الحل ــ20**</u>

كل العوامل الأولية التي تظهر في تحليل b تظهر أيضا في تحليل a و أسس كل هذه العوامل أكبر منها في تحليل a عن تحليل b إذن : العدد a يقبل القسمة على العدد b و حاصل هذه القسمة هو كمايلي :

$$a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11(2 \times 3^3 \times 7 \times 5)$$
$$= b \times (2 \times 3^3 \times 7 \times 5)$$

إذن : $a/b = 2 \times 3^3 \times 7 \times 5$

<u>**التمرين ــ 21**</u>

ما هي قواسم مربع عدد طبيعي أولي .

<u>**الحل ــ 21**</u>

ليكن n عدد طبيعي أولي .

إذن : n^2 يقبل ثلاث قواسم هي $\{1 ; n ; n^2\}$

<u>**التمرين ــ 22**</u>

1 ــ حلل العدد 625 إلى جداء عوامل أولية . ثم إستنتج كل قواسمه الموجبة .

2 ــ عين كل الثنائيات (x ; y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 625$

<u>**الحل ــ 22**</u>

1 ــ

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

إذن : قواسم 625 هي $\{1 ; 5 ; 25 ; 125 ; 725\}$

2 ــ $x^2 - y^2 = 625$ تكافئ $(x - y)(x + y) = 625$

تكافئ $\begin{cases} x - y = 1 \text{ و } x + y = 625 \\ \text{أو} \\ x - y = 5 \text{ و } x + y = 125 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2x = 626 \text{ و } y = x - 1 \\ \text{أو} \\ 2x = 130 \text{ و } y = x - 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = 313 \text{ و } y = 312 \\ \text{أو} \\ x = 65 \text{ و } y = 64 \end{cases}$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(312 ; 313) ; (60 ; 65)\}$

ملاحظة : لا يمكن للعدد $x - y$ أن يكون أكبر من العدد $x + y$ لأن x و y عددين طبيعيين
لذلك إما $x - y = 1$ أو $x - y = 5$

التمرين ــ 23

1 ــ حلل العدد 725 إلى جداء عوامل أولية .
2 ــ عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 725$

الحـل ــ 23

1 ــ

725	5
145	5
29	29
1	

2 ــ $x^2 - y^2 = 725$ تكافئ $(x - y)(x + y) = 725$

تكافئ $\begin{cases} x - y = 1 \text{ و } x + y = 725 \\ \text{أو} \\ x - y = 5 \text{ و } x + y = 145 \\ \text{أو} \\ x - y = 25 \text{ و } x + y = 29 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2x = 726 \text{ و } y = x - 1 \\ \text{أو} \\ 2x = 150 \text{ و } y = x - 5 \\ \text{أو} \\ 2x = 54 \text{ و } y = x - 25 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = 363 \text{ و } y = 362 \\ \text{أو} \\ x = 75 \text{ و } y = 70 \\ \text{أو} \\ x = 27 \text{ و } y = 2 \end{cases}$

نتيجة : الثنائيات هي $\{(2 ; 27) ; (70 ; 75) ; (362 ; 363)\}$

التمرين ــ24

ليكن a عدد طبيعي . برهن أن إذا كان 2 قاسما للعدد a^2 فإن 2 يقسم العدد a

الحـل ــ 24

لدينا : $a^2 = a \times a$
إذن : إذا كان 2 يقسم a^2 فإن إما 2 يقسم a أو 2 يقسم a (لأن 2 أولي)
أي : 2 يقسم a

التمرين ــ 25

p عدد طبيعي أولي و a عدد طبيعي .
برهن أن إذا كان p يقسم a^2 فإن p يقسم a

الحـل ــ 25

p يقسم a^2 إذن p يقسم $a \times a$
إذن : p يقسم a أو p يقسم a (لأن p أولي)
منه p يقسم a

التمرين ــ 26

1 ــ كيف يمكن معرفة أن عددا طبيعيا N هو مربع تام من خلال تحليله إلى جداء عوامل أوا'ية ؟
2 ــ عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n حتى يكون العدد $240\,n$ مربعا تاما .
3 ــ أوجد عددا طبيعيا مكونا من أربعة أرقام حيث رقمه الأخير (رقم الآلاف) 9 و هو مربع تام و يقبل القسمة على 147

الحـل ــ 26

1 ــ يكون عدد طبيعي N مربع تام إذا و فقط إذا كانت كل الأسس الظاهرة في تحليله إلى عوامل أولية هي أعداد زوجية .

2 ــ $240\,n = 2^4 \times 3 \times 5 \times n$

إذن : يكفي أن يكون $n = 3 \times 5$ حتى يكون $240\,n$ مربع تاما

منه $n = 15$

3 ــ ليكن N العدد المطلوب .

لدينا : $147 = 3 \times 7^2$

إذن : $N \equiv 0[147]$ $N = 147\,n$

أي : $N = 3 \times 7^2 \times n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

لكن N مربع تام إذن $n = 3\,k^2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

منه : $N = 3 \times 3 \times 7^2 \times k^2$

أي $N = (3 \times 7 \times k)^2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

لدينا $\sqrt{9000} \approx 94{,}3$ و $\sqrt{9999} \approx 98{,}9$

إذن : يكفي أن نأخذ $94 < 3 \times 7 \times k < 98$

أي $94 < 21\,k < 98$ منه $\dfrac{94}{21} < k < \dfrac{98}{21}$ أي $4{,}4 < k < 4{,}6$

منه : لا توجد أي قيمة لــ k تجعل $94 < 21\,k < 98$

نتيجة : لا يوجد أي عدد طبيعي N مكون من 4 أرقام حيث رقمه الأخير الآلاف هو 9 و N يقبل القسمة على 147

التمرين ــ 27

1 ــ حلل العدد $a = 4312$ إلى جداء عوامل أولية .

2 ــ عين أصغر عدد طبيعي n حيث $a\,n$ يكون مربع تام

3 ــ عين أصغر عدد طبيعي p حيث $a\,p$ يكون مضاعف للعدد 1000

الحـل ــ27

1 ــ

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

إذن : $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

2 ــ أصغر عدد طبيعي n حيث $a\,n$ مربع تام هو $n = 2 \times 11 = 22$

3 ــ نحلل العدد 1000 كمايلي :

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

إذن : $1000 = 2^3 \times 5^3$

إذن : أصغر عدد طبيعي p حتى يكون $a\,p$ مضاعف 1000 هو $p = 5^3 = 125$

التمرين ــ 28

1 ــ حلل العدد 4032 إلى جداء عوامل أولية .

2 ــ عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $n(n+1) = 4032$

الحـل ــ 28

1 ــ

4032	2
2016	2
1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$4032 = 2^6 \times 3^2 \times 7$

2 ـ إذا وجد عدد طبيعي n حيث $n(n+1) = 4032$ فإن كل من n و $n + 1$ هما قاسمين للعدد 4032 إذن : يكفي أن نبحث عن قواسم العدد 4032 ثم البحث عن قاسمين متتاليين (n و $n+1$) و هما 2^6 و 7×3^2 أي 64 و 63

منه : $n = 63$ أي : $63 \times 64 = 4032$

طريقة أخرى : نحل في N المعادلة $n(n+1) = 4032$

أي $n^2 + n - 4032 = 0$

$\Delta = 1 + 16128 = 16129 = (127)^2$

إذن : إما $n = \frac{-1-127}{2} = -64$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى N

أو $n = \frac{-1+127}{2} = 63$ مقبول

نتيجة : $n = 63$

التمرين ـ 29

1 ـ عين $ppcm(230 ; 128)$

2 ـ عين $ppcm(-15 ; 18)$

الحـل ـ 29

ـ 1

230	2
115	5
23	23
1	

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$230 = 2 \times 5 \times 23$ ، $128 = 2^7$

نتيجة : $ppcm(128 ; 230) = 2^7 \times 5 \times 23$

ـ 2 $ppcm(-15 ; 18) = ppcm(15 ; 18)$

$15 = 3 \times 5$ ؛ $18 = 2 \times 3^2$

إذن : $ppcm(15 ; 18) = 3^2 \times 2 \times 5 = 90$

نتيجة : $ppcm(-15 ; 18) = 90$

التمرين ـ30

عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $ppcm(18 ; a) = 630$

الحـل ـ 30

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

إذن : $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$18 = 2 \times 3^2$

$ppcm(a ; 18) = 630$ إذن : $a = 2^n \times 3^p \times 5 \times 7$ حيث $\begin{cases} n \in \{0 ; 1\} \\ p \in \{0 ; 1 ; 2\} \end{cases}$

2^0: $3^0 = 1$ ، $3^1 = 3$ ، $3^2 = 9$

2^1: $3^0 = 2$ ، $3^1 = 6$ ، $3^2 = 18$

نتيجة : $a \in \{35 ; 35 \times 3 ; 35 \times 9 ; 35 \times 2 ; 35 \times 6 ; 18 \times 35\}$

التمرين ـ 31

n عدد طبيعي . يوافق 3 بترديد 28 و بترديد 35

1 ـ برهن أن $n - 3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28

2 ـ ما هي أصغر قيمة للعدد n

الحـل ـ 31

1 ـ $\begin{cases} n \equiv 3[35] \\ n \equiv 3[28] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} n - 3 \equiv 0[35] \\ n - 3 \equiv 0[28] \end{cases}$

أي $\begin{cases} n - 3 \text{ مضاعف لـ } 35 \\ n - 3 \text{ مضاعف لـ } 28 \end{cases}$

إذن : $n - 3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28

2 ـ يكون n أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $n - 3$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 35 و 28

لدينا : $\begin{cases} 35 = 7 \times 5 \\ 28 = 7 \times 4 \end{cases}$ إذن : $ppcm(35 ; 28) = 7 \times 5 \times 4 = 140$

منه $n - 3 = 140$

إذن : $n = 143$

التمرين ـ 32

عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n حيث باقي قسمة n على كل من العددين 52 و 64 هو 7

الحـل ـ 32

$\begin{cases} n \equiv 7[52] \\ n \equiv 7[64] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} n - 7 \equiv 0[52] \\ n - 7 \equiv 0[64] \end{cases}$

إذن : $(n - 7)$ مضاعف مشترك للعددين 52 و 64

نتيجة : يكون n أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $ppcm(52 ; 64) = n - 7$

لدينا : $\begin{cases} 52 = 2^2 \times 13 \\ 64 = 2^6 \end{cases}$

إذن : $ppcm(52 ; 64) = 2^6 \times 13 = 832$

منه : $n - 7 = 832$

أي : $n = 839$

التمرين ـ33

n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $ppcm(n ; 2n + 1)$

الحـل ـ 33

$(2n + 1) - 2(n) = 1$ إذن : توجد ثنائية من الأعداد الصحيحة $(\alpha ; \beta) = (1 ; -2)$

تحقق $\alpha(2n + 1) + \beta n = 1$

منه حسب مبرهنة بيزو فان العددين n و $2n + 1$ أوليان فيما بينهما .

نتيجة : $ppcm(n ; 2n + 1) = n(2n + 1)$

التمرين ـ 34

n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $ppcm(2n + 2 ; 4n + 2)$

الحـل ـ 34

$ppcm(2n + 2 ; 4n + 2) = 2 \times ppcm(n + 1 ; 2n + 1)$

لكن $2n + 1$ و $n + 1$ أوليان فيما بينهما لأن $2(n + 1) - (2n + 1) = 1$

منه $ppcm(n + 1 ; 2n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$

نتيجة : $ppcm(2n + 2 ; 4n + 2) = 2(n + 1)(2n + 1)$

التمرين ـ 35

n عدد طبيعي غير معدوم

نضع $a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1)$ ؛ $b = (3^n + 1)(7^n + 1)$

عين $ppcm(a ; b)$

الحـل ـ 35

$a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1) = (3^n - 1)(3^n + 1)(7^n - 1)(7^n + 1)$

إذن : $a = b \times (3^n - 1)(7^n - 1)$

أي : a مضاعف b

إذن : $ppcm(a ; b) = a$

التمرين – 36

n عدد طبيعي أكبر تماما من 3

نضع $a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$ ؛ $b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$

برهن أن : $ppcm(a ; b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) \times ppcm(6 ; 3)$

الحـل – 36

$a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$

$3n^2 + 3n - 18 = 3(n - 2)(n + 3)$

$n^2 - n - 6 = (n + 2)(n - 3)$

إذن : $b = 3(n - 2)(n + 3)(n + 2)(n - 3)$

أي $b = 3(n^2 - 4)(n^2 - 9)$

منه : $ppcm(a ; b) = ppcm(6(n^2 - 4)(n^2 - 9) ; 3(n^2 - 4)(n^2 - 9))$

$= (n^2 - 4)(n^2 - 9) \times ppcm(6 ; 3)$

التمرين – 37

d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a^2 و ab

الحـل – 37

$$ppcm(a^2 ; ab) = a \times ppcm(a ; b)$$

$$= a\left(\frac{ab}{d}\right) = \frac{a^2 b}{d}$$

التمرين – 38

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة $\begin{cases} a + b = 60 \\ ppcm(a ; b) = 40 \end{cases}$

الحـل – 38

لنبحث عن قواسم 40 : $40 = 2^3 \times 5$

إذن : قواسم 40 هي $\{1 ; 5 ; 2 ; 10 ; 4 ; 20 ; 8 ; 40\}$.

منه : a و b ينتميان إلى المجموعة $\{1 ; 5 ; 2 ; 10 ; 4 ; 20 ; 8 ; 40\}$

إذن : إما $(a = 20$ و $b = 40)$ أو $(a = 40$ و $b = 20)$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(20 ; 40) ; (40 ; 20)\}$

التمرين – 39

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق العلاقة :

$$ppcm(a ; b) = 21 \times pgcd(a ; b)$$

الحـل – 39

ليكن $\alpha = pgcd(a ; b)$

نضع $\begin{cases} a = \alpha x \\ b = \alpha y \end{cases}$ حيث $pgcd(x ; y) = 1$

إذن : $ppcm(a ; b) = ppcm(\alpha x ; \alpha y)$

$= \alpha \times ppcm(x ; y)$

$= \alpha \times x y$ لأن x و y أوليان فيما بينهما .

نتيجة : يكون $ppcm(a ; b) = 21 \times pgcd(a ; b)$ إذا و فقط إذا كان $x y = 21$ و $pgcd(x ; y) = 1$

منه $(x ; y) \in \{(1 ; 21) ; (21 ; 1) ; (3 ; 7) ; (7 ; 3)\}$

أي $(a ; b) \in \{(\alpha ; 21\alpha) ; (21\alpha ; \alpha) ; (3\alpha ; 7\alpha) ; (7\alpha ; 3\alpha)\}$

التمرين – 40

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $ppcm(a ; b) - pgcd(a ; b) = 187$

الحـل – 40

ليكن $\begin{cases} a = x \times pgcd(a ; b) \\ b = y \times pgcd(a ; b) \end{cases}$ إذن : x و y أوليان فيما بينهما

أي $ppcm(x ; y) = x y$

$ppcm(a ; b) - pgcd(a ; b) = 187$ يكافئ $x y \times pgcd(a ; b) - pgcd(a ; b) = 187$

إذن : $pgcd(a ; b)[x y - 1] = 187$

منه : $pgcd(a ; b)$ قاسم للعدد 187

أي : $pgcd(a ; b) \in \{1 ; 11 ; 17 ; 187\}$

إذن : نميز الحالات التالية :

أولا : $pgcd(a ; b) = 1$ إذن : $x y - 1 = 187$

منه : $x y = 188$

لدينا : $188 = 2^2 \times 47$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 188) ; (4 ; 47) ; (188 ; 1) ; (47 ; 4)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(1 ; 188) ; (4 ; 47) ; (188 ; 1) ; (47 ; 4)\}$

ثانيا : $pgcd(a ; b) = 11$ إذن : $x y - 1 = 17$

منه : $x y = 18$

لدينا : $18 = 2 \times 3^2$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 18) ; (2 ; 9) ; (9 ; 2) ; (18 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(11 ; 198) ; (22 ; 99) ; (99 ; 22) ; (198 ; 11)\}$

ثالثا : $pgcd(a ; b) = 17$ إذن : $x y - 1 = 11$

منه : $x y = 12$

لدينا : $12 = 2^2 \times 3$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 12) ; (4 ; 3) ; (3 ; 4) ; (12 ; 1)\}$

أي $(a ; b) \in \{(17 ; 204) ; (68 ; 51) ; (51 ; 68) ; (204 ; 17)\}$

رابعا : $pgcd(a ; b) = 187$ إذن : $x y - 1 = 1$

منه : $x y = 2$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 2) ; (2 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(187 ; 374) ; (374 ; 187)\}$

خلاصة : الثنائيات المطلوبة هي : $\{(17 ; 204) ; (68 ; 51) ; (51 ; 68) ; (204 ; 17) ; (11 ; 198) ;$
$(22 ; 99) ; (99 ; 22) ; (198 ; 11) ; (1 ; 188) ; (4 ; 47) ; (188 ; 1) ; (47 ; 4) ; (187 ; 374) ; (374 ; 187)\}$

التمرين ــ 41

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $ppcm(a ; b) = pgcd(a ; b)$

الحـل ــ 41

ليكن $pgcd(a ; b) = \alpha$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$ إذن : $ppcm(x ; y) = x y$

منه : $ppcm(a ; b) = pgcd(a ; b)$ يكافئ $ppcm(\alpha x ; \alpha y) = \alpha$

يكافئ $\alpha \times ppcm(x ; y) = \alpha$

يكافئ $\alpha x y = \alpha$

يكافئ $x y = 1$

يكافئ $x = y = 1$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(a ; a)\}$ حيث $a \in IN^*$

التمرين ــ 42

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $ppcm(a ; b) + 11\, pgcd(a ; b) = 20$ .... (1)

الحـل ــ 42

ليكن $\alpha = pgcd(a ; b)$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$ إذن : $ppcm(a ; b) = ppcm(\alpha x ; \alpha y) = \alpha x y$

منه : الشرط (1) يكافئ $\alpha x y + 11 \alpha = 20$

يكافئ $11 \alpha = 20 - \alpha x y$

بما أن $\left.\begin{matrix} \alpha x y > 0 \\ 11 \alpha > 0 \end{matrix}\right\}$ فإن $0 \le 20 - \alpha x y \le 20$ إذن : $0 \le 11 \alpha \le 20$

لكن $\alpha \neq 0$ إذن : $\alpha = 1$

منه : $20 - xy = 11$

أي : $xy = 9$

منه $(x ; y) \in \{(1 ; 9) ; (9 ; 1)\}$

أي : الثنائيات المطلوبة هي : $(a ; b) \in \{(1 ; 9) ; (9 ; 1)\}$

التمرين ــ 43

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط

$ppcm(a ; b) - 9\ pgcd(a ; b) = 13$ ......(1) مع $a \geq b$

الحـل ــ 43

ليكن $\alpha = pgcd(a ; b)$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$

إذن : $ppcm(a ; b) = \alpha x y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما

منه الشرط (1) يكافئ $\alpha x y - 9 \alpha = 13$

يكافئ $\alpha(xy - 9) = 13$

يكافئ $\alpha = 1$ و $xy - 9 = 13$ أو $\alpha = 13$ و $xy - 9 = 1$

يكافئ $\alpha = 1$ و $xy = 22$ أو $\alpha = 13$ و $xy = 10$

يكافئ $\alpha = 1$ و $(x ; y) \in \{(1 ; 22) ; (2 ; 11) ; (11 ; 2) ; (22 ; 1)\}$ أو $\alpha = 13$ و $(x ; y) \in \{(1 ; 10)(2 ; 5)(5 ; 2)(10 ; 1)\}$

يكافئ $(a ; b) \in \{(1 ; 22) ; (2 ; 11) ; (11 ; 2) ; (22 ; 1)\}$ أو $(a ; b) \in \{(13 ; 130)(26 ; 65)(65 ; 26)(130 ; 13)\}$

يكافئ $(a ; b) \in \{(11 ; 2) ; (22 ; 1) ; (65 ; 26) ; (130 ; 13)\}$ لأن $a \geq b$

التمرين ــ 44

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ ن الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط : $pgcd(a ; b) = 7$ و $ppcm(a ;b) = 84$

الحـل ــ 44

ليكن $a = 7x$ و $b = 7y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $ppcm(a ;b) = 7xy$

نتيجة : $7xy = 84$ يكافئ $xy = 12$

يكافئ $(x ; y) \in \{(1 ; 12) ; (3 ; 4) ; (4 ; 3) ; (12 ;1)\}$

منه الثنائيات المطلوبة هي : $(a ; b) \in \{(7 ; 84) ; (21 ; 28) ; (28 ; 21) ; (84 ;7)\}$

التمرين ــ 45

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6

نضع $a = 3n + 2$ ؛ $b = n - 5$

1 ــ أحسب $a - 3b$

2 ــ إستنتج أن $pgcd(a ; b) \in \{1 ; 17\}$

3 ــ عين قيم n التي يكون من أجلها $pgcd(a ; b) = 17$ و $ppcm(a ; b) \leq 150$

الحـل ــ 45

1 ــ $a - 3b = 3n + 2 - 3(n - 5) = 3n + 2 - 3n + 15 = 17$

2 ــ ليكن $pgcd(a ;b) = \alpha$

إذن : $\alpha | a$ و $\alpha | b$ منه $\alpha | a$ و $\alpha | 3b$ منه : $\alpha | a - 3b$ أي $\alpha | 17$

نتيجة : $pgcd(a ; b) \in \{1 ; 17\}$

3 ــ ليكن $pgcd(a ; b) = 17$

نضع $a = 17x$ و $b = 17y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $ppcm(a ;b) = 17xy$

لدينا $\text{ppcm}(a ; b) \leq 150$ إذن : $17\, x\, y \leq 150$

منه : $xy \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (2 ; 1) ; (1 ; 3) ; (3 ; 1) ; (1 ; 4) ; (4 ; 1) ; (1 ; 5) ; (5 ; 1) ; (1 ; 6) ; (6 ; 1) ; (2 ; 3) ; (3 ; 2) ; (1 ; 7) ; (7 ; 1) ; (1 ; 3) ; (8 ; 1)\}$

أي : $(a ; b) \in \{(17 ; 17) ; (17 ; 34) ; (34 ; 17) ; (17 ; 51) ; (51 ; 17) ; (17 ; 68) ; (68 ; 17) ; (17 ; 85) ; (85 ; 17) ; (17 ; 102) ; (102 ; 17) ; (34 ; 51) ; (51 ; 34) ; (17 ; 119) ; (119 ; 17) ; (17 ; 136) ; (136 ; 17)\}$

لكن $a - 3\, b = 17$ أي $a = 3\, b + 17$

منه الثنائيات المطلوبة هي $\{(68 ; 17)\}$

أي $\begin{cases} 3\, n + 2 = 68 \\ n - 5 = 17 \end{cases}$ منه $\begin{cases} 3\, n = 66 \\ n = 17 + 5 \end{cases}$ أي $n = 22$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـــ n تحقق الشرط المطلوب و هي $n = 22$

التمرين ـــ 46

n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل من الحالات التالية :

1 ـ $a = n$ ؛ $b = 2\, n + 1$

2 ـ $a = 2\, n + 3$ ؛ $b = 3\, n + 5$

الحــل ـ46

1 ـ $\begin{cases} a = n \\ b = 2\, n + 1 \end{cases}$ إذن : $b - 2\, a = 2\, n + 1 - 2\, n = 1$

منه : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

1 ـ $\begin{cases} a = 2\, n + 3 \\ b = 3\, n + 5 \end{cases}$ إذن : $2\, b - 3\, a = 2(3\, n + 5) - 3(2\, n + 3) = 6\, n + 10 - 6\, n - 9 = 1$

منه : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين ـــ 47

n عدد طبيعي .

1 ـ أثبت أن $\text{pgcd}(11\, n + 3 ; 7\, n + 2) = 1$

2 ـ أثبت أن $\text{pgcd}(n ; n^2 + 1) = 1$

الحــل ـ 47

1 ـ ليكن $\text{pgcd}(11\, n + 3 ; 7\, n + 2) = \alpha$

$\begin{cases} \alpha \mid 11\, n + 3 \\ \alpha \mid 7\, n + 2 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \alpha \mid 7(11\, n + 3) \\ \alpha \mid 11(7\, n + 2) \end{cases}$

منه : $\alpha \mid 11(7n + 2) - 7(11\, n + 3)$

أي $\alpha \mid 77\, n + 22 - 77\, n - 21$

أي $\alpha \mid 1$

منه : $\alpha = 1$

2 ـ ليكن $\text{pgcd}(n ; n^2 + 1) = \alpha$

$\begin{cases} \alpha \mid n \\ \alpha \mid n^2 + 1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \alpha \mid n^2 \\ \alpha \mid n^2 + 1 \end{cases}$

منه : $\alpha \mid n^2 + 1 - n^2$

أي $\alpha \mid 1$

منه $\alpha = 1$

التمرين ـــ 48

n عدد طبيعي غير معدوم .

باستعمال مبرهنة بيزو برهن أن العددين $a = 2\, n^2 + 4\, n + 1$ و $b = n + 2$ أوليان فيما بينهما .

الحــل ــ 48

$$a - 2nb = 2n^2 + 4n + 1 - 2n(n+2) = 1$$

إذن : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين ــ 49

n عدد طبيعي غير معدوم

1 ــ تحقق أن : $(n^3+1)^2 = n^2(n^4+2n)+1$

2 ــ إستنتج أن العددين n^3+1 و n^4+2n أوليان فيما بينهما .

الحــل ــ 49

1 ــ $(n^3+1)^2 = n^6 + 2n^3 + 1 = n^2(n^4+2n)+1$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن : $(n^3+1)^2 = n^2(n^4+2n)+1$

إذن : $(n^3+1)(n^3+1) - n^2(n^4+2n) = 1$

منه : حسب مبرهنة بيزو فإن العددان n^3+1 و n^4+2n أوايان فيما بينهما لأن توجد ثنائية $(\alpha ; \beta)$ من الأعداد الصحيحة تحقق $\alpha(n^3+1) + \beta(n^4+2n) = 1$

و هي $(\alpha ; \beta) = (n^3+1 ; -n^2)$

التمرين ــ 50

n عدد طبيعي غير معدوم .

1 ــ حلل العدد $n(2n+1) - 1$

2 ــ أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $(n+1)$ و $n(2n+1)$

الحــل ــ 50

1 ــ $n(2n+1) - 1 = 2n^2 + n - 1$

لنحلل كثير الحدود p "متغير الحقيقي x حيث $p(x) = 2x^2 + x - 1$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

منه : $p(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)$

أي : $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1)$

نتيجة : العدد $n(2n+1) - 1$ يحلل إلى $(2n-1)(n+1)$

2 ــ حسب السؤال (1) : $n(2n+1) - 1 = (2n-1)(n+1)$

منه : $n(2n+1) - (2n-1)(n+1) = 1$

إذن : حسب بيزو فإن العددان $(n+1)$ و $n(2n+1)$ أوليان فيما بينهما

منه : $\text{pgcd}(n(2n+1) ; n+1) = 1$

التمرين ــ51

باستعمال خوارزمية إقليدس عين ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $12x + 35y = 1$

الحــل ــ 51

$$\begin{array}{r|l} 35 & 12 \\ \hline \boxed{11} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 11 \\ \hline \boxed{1} & 1 \end{array}$$

لنكتب البواقي المتتالية في خوارزمية إقليدس كمايلي :

$(1) \ldots\ldots\ 11 = 35 - 12(2)$

$(2) \ldots\ldots\ 1 = 12 - 11(1)$

بتعويض (1) في (2) نحصل على : $1 = 12 - [35 - 12(2)]$

أي : $1 = 12 - 35 + 12(2)$

أي : $1 = 12(3) - 35$

منه : يكفي أخذ $x = 3$ و $y = -1$ حتى يكون $12x + 35y = 1$

أي : $(x ; y) = (3 ; -1)$

التمرين ــ 52

باستعمال خزارزمية إقليدس عين ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 حيث : $257x + 45y = \text{pgcd}(257 ; 45)$

الحــل ــ 52

لنبحث عن $pgcd(257\,;\,45)$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 257 & 45 \\ 225 & 5 \\ \boxed{32} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 45 & 32 \\ 32 & 1 \\ \boxed{13} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 13 \\ 26 & 2 \\ \boxed{6} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \boxed{1} & 2 \end{array}$$

إذن : $pgcd(257\,;\,45) = 1$

لنكتب البواقي المتسلسلة كمايلي :

$(1)\ ....\ 1 = 13 - 6(2)$

$(2)\ ....\ 6 = 32 - 13(2)$

$(3)\ ....\ 13 = 45 - 32(1)$

$(4)\ ....\ 32 = 257 - 45(5)$

نعوض (2) في (1) : $1 = 13 - 2[32 - 13(2)]$

أي : $1 = 13 - 32(2) + 13(4)$

أي : $1 = 13(5) - 32(2)\ ....\ (5)$

نعوض (3) في (5) : $1 = 5[45 - 32(1)] - 32(2)$

أي : $1 = 45(5) - 32(5) - 32(2)$

أي : $1 = 45(5) - 32(7)\ ....\ (6)$

نعوض (4) في (6) : $1 = 45(5) - 7[257 - 45(5)]$

أي : $1 = 45(5) - 257(7) + 45(35)$

أي : $1 = 257(-7) + 45(40)$

إذن : يكفي أخذ $(x\,;\,y) = (-7\,;\,40)$ حيث $257\,x + 45\,y = 1$

تحقيق : $45 \times 40 = 1800$ و $257 \times 7 = 1799$

$-7(257) + 45(40) = -1799 + 1800 = 1$

التمرين ــ 53

1 ــ عين $pgcd(168\,;\,20)$

2 ــ هل المعادلة $168\,x + 20\,y = 6$ تقبل حلا في Z^2

3 ــ هل المعادلة $168\,x + 20\,y = 4$ تقبل حلا في Z^2

الحــل ــ 53

1 ــ $\left.\begin{array}{l} 20 = 4 \times 5 \\ 168 = 4 \times 42 \end{array}\right\}$ إذن : $pgcd(168\,;\,20) = 4$

2 ــ لدينا $\left.\begin{array}{l} 4|20 \\ 4|168 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} 4|20\,y \\ 4|168\,x \end{array}\right\}$

منه : $4|168\,x + 20\,y$

أي $4|6$ تناقض

إذن : لا يوجد أي ثنائية $(x\,;\,y)$ من Z^2 تحقق $168\,x + 20\,y = 6$

3 ــ $168\,x + 20\,y = 4$ تكافئ $42\,x + 5\,y = 1$

إذن : المعادلة تقبل حل في Z^2 لأن العددان 5 و 42 أوليان فيما بينهما

فإذن حسب بيزو توجد ثنائية $(x\,;\,y)$ من Z^2 تحقق $42\,x + 5\,y = 1$

التمرين ــ 54

عين كل الثنائيات $(a\,;\,b)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $5\,a = 7\,b$

الحــل ــ 54

$5\,a = 7\,b$ إذن : 7 يقسم $5\,a$

لكن 7 أولي مع 5 إذن : حسب غوص فإن 7 يقسم a

منه : $a = 7\,k$ حيث $k \in Z$

إذن : $\begin{cases} 5a = 7b \\ a = 7k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 5(7k) = 7b \\ a = 7k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} b = 5k \\ a = 7k \end{cases}$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(7k ; 5k)\}$ حيث $k \in Z$

التمرين ـــ55

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من Z^2 حلول المعادلة $55x = 16y$

الحـــل ـــ55

$55x = 16y$ إذن : 16 يقسم x (لأن 16 أولي مع 55)

منه : $x = 16k$ حيث $k \in Z$

إذن $55(16k) = 16y$

منه $y = 55k$

نتيجة : حلول المعادلة $55x = 16y$ في Z^2 هي الثنائيات $\{(16k ; 55k)\}$ حيث $k \in Z$

التمرين ـــ 56

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول للمعادلة $21(x - 3) = 12(y + 4)$ .... (1)

الحـــل ـــ 56

المعادلة (1) تكافئ $7(x - 3) = 4(y + 4)$ .... (2)

إذن : 4 يقسم $(x - 3)$ لأن 4 أولي مع 7

منه $x - 3 = 4k$ حيث $k \in Z$ .... (α)

إذن المساواة (2) تصبح : $7(4k) = 4(y + 4)$

أي : $7k = y + 4$

منه : $y = 7k - 4$

من المساواة (α) نستنتج أن $x = 4k + 3$

نتيجة : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $\{(4k + 3 ; 7k - 4)\}$ حيث $k \in Z$

التمرين ـــ57

1 ـــ حل في Z^2 المعادلة $3x - 13y = 1$ .... (1)

2 ـــ إستنتج مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث $3x \equiv 1[13]$

الحـــل ـــ 57

1 ـــ الثنائية $(-4 ; -1)$ هي حل خاص للمعادلة لأن $3(-4) - 13(-1) = -12 + 13 = 1$

إذن : المعادلة (1) تكافئ $3x - 13y = 3(-4) - 13(-1)$

تكافئ $3x - 3(-4) = 13y - 13(-1)$

تكافئ $3(x + 4) = 13(y + 1)$

منه : 13 يقسم $(x + 4)$ لأن 13 أولي مع 3

إذن : $x + 4 = 13k$ حيث $k \in Z$

منه : $3(13k) = 13(y + 1)$

أي : $y + 1 = 3k$

نتيجة : $\begin{cases} x + 4 = 13k \\ y + 1 = 3k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 13k - 4 \\ y = 3k - 1 \end{cases}$

منه حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $\{(13k - 4 ; 3k - 1)\}$ حيث $k \in Z$

2 ـــ $3x \equiv 1[13]$ إذن : $3x = 13y + 1$ حيث $y \in Z$

منه : $3x - 13y = 1$

إذن : x هو حل المعادلة (1)

منه : $x = 13k - 4$ حيث $k \in Z$

تحقيق : $3x = 3(13k - 4) = 39k - 12$

إذن : $3x \equiv -12[13]$

أي $3x \equiv 1[13]$

التمرين ـــ 58

لتكن في Z^2 المعادلة $2045\,x - 64\,y = 1$ ...... (1)

1 ــ عين $pgcd(2045\,;\,64)$

2 ــ إستنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في Z^2

3 ــ أوجد حلا خاصا للمعادلة (1)

4 ــ عين كل حلول المعادلة (1) في Z^2

الحـل ــ 58

1 ــ $\left.\begin{array}{l}64 = 2^6\\ 2045 = 5 \times 409\end{array}\right\}$ إذن : $pgcd(64\,;\,2045) = 1$

2 ــ 64 و 2045 أوليان فيما بينهما إذن : حسب بيزو توجد ثنائية $(x\,;\,y)$ من Z^2 تحقق $2045\,x + 64\,y = 1$

إذن : المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

3 ــ لنبحث عن الحل الخاص باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 2045 & 64 \\ \underline{192} & 31 \\ 125 & \\ \underline{64} & \\ 61 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 61 \\ \underline{61} & 1 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 61 & 3 \\ \underline{60} & 20 \\ 1 & \end{array}$$

$(1)\ ......\ 1 = 61 - 3(20)$

$(2)\ ......\ 3 = 64 - 61(1)$

$(3)\ ....\ 61 = 2045 - 64(31)$

نعوض (2) في (1) : $1 = 61 - 20[64 - 61(1)]$

أي : $1 = 61 - 64(20) + 61(20)$

أي : $1 = 61(21) - 64(20)$ .... (4)

نعوض (3) في (4) : $1 = 21[2045 - 64(31)] - 64(20)$

أي : $1 = 2045(21) - 64(21 \times 31) - 64(20)$

أي : $1 = 2045(21) - 64(21 \times 31 + 20)$

أي : $1 = 2045(21) - 64(671)$

إذن : الحل الخاص هو $(x\,;\,y) = (21\,;\,671)$

4 ــ حل المعادلة (1) في Z^2

$2045\,x - 64\,y = 1$ تكافئ $2045\,x - 64\,y = 2045(21) - 64(671)$

تكافئ $2045\,x - 2045(21) = 64\,y - 64(671)$

تكافئ $2045(x - 21) = 64(y - 671)$

إذن : 64 يقسم $(x - 21)$ لأن 64 و 2045 أوليان فيما بينهما

منه $x - 21 = 64\,k$ حيث $k \in Z$

إذن : $2045(64\,k) = 64(y - 671)$

أي $2045\,k = y - 671$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l}x - 21 = 64\,k\\ y - 671 = 2045\,k\end{array}\right\}$ منه $\left.\begin{array}{l}x = 64\,k + 21\\ y = 2045\,k + 671\end{array}\right\}$ حيث $k \in Z$

إذن : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $(64\,k + 21\,;\,2045\,k + 671)$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 59

نعتبر في Z^2 المعادلة : $11\,x - 5\,y = 14$ .... (1)

1 ــ تحقق أن الثنائية $(19\,;\,39)$ حل للمعادلة (1) ثم إستنتج كل حلولها

2 ــ بين أن توجد ثنائية وحيدة $(\alpha\,;\,\beta)$ حل للمعادلة (1) حيث $0 < \alpha < 5$

الحـل ــ 59

1 ــ $11(19) - 5(39) = 209 - 195 = 14$

إذن : فعلا الثنائية $(19\,;\,39)$ حل للمعادلة (1)

منه : المعادلة (1) تكافئ $11\,x - 5\,y = 11(19) - 5(39)$

تكافئ $11\,x - 11(19) = 5\,y - 5(39)$

تكافئ $11(x-19)=5(y-39)$

إذن : 5 يقسم $x - 19$ لأن 5 و 11 أوليان فيما بينهما

أي $x-19=5k$ حيث $k \in Z$

منه : $11(5k)=5(y-39)$

أي $y-39=11k$

نتيجة : $\begin{cases} x-19=5k \\ y-39=11k \end{cases}$ منه $\begin{cases} x=5k+19 \\ y=11k+39 \end{cases}$ و هي حلول المعادلة (1) في Z^2

2 ـ ليكن $\begin{cases} \alpha=5k+19 \\ \beta=11k+39 \end{cases}$ حل للمعادلة (1)

$0<\alpha<5$ يكافئ $0<5k+19<5$

يكافئ $-19<5k<-14$

يكافئ $-19/5<k<-14/5$

يكافئ $-3,8<k<-2.8$

يكافئ $k=-3$ لأن $k \in Z$

منه : $\begin{cases} \alpha=5(-3)+19=4 \\ \beta=11(-3)+39=6 \end{cases}$

نتيجة : الحل المطلوب هو $(\alpha ; \beta)=(4 ; 6)$

التمرين ـ 60

في المستوي المنسوب إلى معلم نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $21x-31y-2=0$

1 ـ تحقق أن النقطة $A(6 ; 4)$ تنتمي إلى (Δ)

2 ـ إستنتج كل نقاط المستقيم (Δ) و التي إحداثياها أعداد صحيحة .

الحـل ـ 60

1 ـ $21(6)-31(4)-2=126-124-2=0$

إذن : النقطة $A(6 ; 4)$ تنتمي إلى (Δ)

2 ـ تكون النقطة $N(x ; y)$ حيث $(x ; y) \in Z^2$ نقطة من (Δ) إذا و فقط إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة $21x-31y=2$ في Z^2

لدينا حسب السؤال (1) الثنائية $(6 ; 4)$ حل خاص

إذن : المعادلة تكافئ $21x-31y=21(6)-31(4)$

تكافئ $21x-21(6)=31y-31(4)$

تكافئ $21(x-6)=31(y-4)$

إذن : 31 يقسم $x - 6$ لأن 31 و 21 أوليان فيما بينهما

منه $x-6=31k$ حيث $k \in Z$

إذن : $21(31k)=31(y-4)$

منه : $y-4=21k$

نتيجة : $\begin{cases} x-6=31k \\ y-4=21k \end{cases}$ منه $\begin{cases} x=31k+6 \\ y=21k+4 \end{cases}$

إذن : النقط المطلوبة هي $N(31k+6 ; 21k+4)$ حيث $k \in Z$

التمرين ـ 61

n عدد طبيعي

برهن أن العدد $n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 6

الحـل ـ 61

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$n^2 \equiv ?[6]$	0	1	4	3	4	1
$n^2+5 \equiv ?[6]$	5	0	3	2	3	0
$n(n^2+5) \equiv ?[6]$	0	0	0	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 6

التمرين ـــ 62

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 . نضع $a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$

1 ـــ أكتب a على شكل جداء خمسة أعداد طبيعية متتابعة

2 ـــ برهن أن العدد a يقبل القسمة على كل من 3 و 5

3 ـــ برهن أن العدد a يقبل القسمة على 8

4 ـــ إستنتج أن العدد a يقبل القسمة على 120

الحــل ـــ62

1 ـــ
$$a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$
$$= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$$
$$= (n - 2)(n - 1)\, n(n + 1)(n + 2)$$

نضع $n - 2 = b$ إذن : $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$ و هو المطلوب

2 ـــ حسب السؤال (1) فإن $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$ حيث $b \in IN^*$ لأن $n > 2$ أي $n - 2 > 0$

إذا كان $b \equiv 0[3]$ فإن $a \equiv 0[3]$

إذا كان $b \equiv 1[3]$ فإن $b + 2 \equiv 0[3]$ إذن : $a \equiv 0[3]$

إذا كان $b \equiv 2[3]$ فإن $b + 1 \equiv 0[3]$ إذن : $a \equiv 0[3]$

نتيجة : a يقبل دائما القسمة على 3

إذا كان $b \equiv 0[5]$ فإن $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 1[5]$ فإن $b + 4 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 2[5]$ فإن $b + 3 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 3[5]$ فإن $b + 2 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 4[5]$ فإن $b + 1 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

نتيجة : a يقبل دائما القسمة على 5

3 ـــ لدينا : $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$

إذا كان b زوجي فإن $\begin{cases} b + 2 \text{ زوجي} \\ b + 4 \text{ زوجي} \end{cases}$

إذن : $b(b + 2)(b + 4)$ يقبل القسمة على 8

منه : a يقبل القسمة على 8

إذا كان b فردي فإن $\begin{cases} b + 1 \text{ زوجي} \\ b + 3 \text{ زوجي} \end{cases}$ حيث $b = 2k + 1$

منه : $\begin{cases} b + 1 = 2k + 2 \\ b + 3 = 2k + 4 \end{cases}$

إذن : $(b + 1)(b + 3) = (2k + 2)(2k + 4)$

أي : $(b + 1)(b + 3) = 2(k + 1) \times 2(k + 2)$

أي $(b + 1)(b + 3) = 4(k + 1)(k + 2)$

بما أن $k + 1$ و $k + 2$ عددين طبيعيين متتابعين فإن أحدهما زوجي

منه : $(b + 1)(b + 3)$ مضاعف 8

إذن : a يقبل القسمة على 8

نتيجة : العدد a دائما يقبل القسمة على 8

4 ـــ $\begin{cases} a \text{ مضاعف } 3 \\ a \text{ مضاعف } 5 \\ a \text{ مضاعف } 8 \end{cases}$ إذن : a مضاعف $8 \times 5 \times 3$ (لأن الأعداد 3 ، 5 و 8 أولية فيما بينها مثنى مثنى) أي a مضاعف 120

التمرين ـــ 63

عين باقي قسمة العددين 7^{10} و 7^{2521} على 11

الحــل ـــ 63

لندرس بواقي قسمة 7^n على 11

$$7^0 \equiv 1[11]$$
$$7^1 \equiv 7[11]$$
$$7^2 \equiv 5[11]$$
$$7^3 \equiv 2[11]$$
$$7^4 \equiv 3[11]$$
$$7^5 \equiv 10[11]$$
$$7^6 \equiv 4[11]$$
$$7^7 \equiv 6[11]$$
$$7^8 \equiv 9[11]$$
$$7^9 \equiv 8[11]$$
$$7^{10} \equiv 1[11]$$

نتيجة : باقي قسمة 7^{10} على 11 هو 1

إذن : $7^{2521} = 7^{10(252)+1} = 7 \times (7^{10})^{252}$ لأن $(7^{10})^{252} \equiv 1[11]$ $7^{2521} \equiv 7[11]$

أي باقي قسمة 7^{2521} على 11 هو 7

التمرين ــ64

1 ــ برهن أن العدد 331 أولي .

n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري على شكل 330 رقما كلها مساوية إلى 9

2 ــ أحسب $n + 1$

الحــل ــ 64

1 ــ $\sqrt{331} = 18{,}1$

n	2	3	5	7	11	13	17
$331 \equiv ?[n]$	1	1	1	2	1	6	8

نتيجة : 331 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية n حيث $n \leq \sqrt{331}$ إذن : 331 أولي .

2 ــ $n = 9 \times 10^{329} + 9 \times 10^{328} + \ldots\ldots + 9 \times 10 + 9$

$$= 9[10^{329} + 10^{328} + \ldots + 10 + 1]$$

$$= 9\left[\frac{10^{330} - 1}{10 - 1}\right]$$

$$= 10^{330} - 1$$

نتيجة : $n + 1 = 10^{330} - 1 + 1$ أي $n + 1 = 10^{330}$

التمرين ــ 65

n عدد طبيعي

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها : $n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv 0[3]$

الحــل ــ 65

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$n^2 \equiv ?[3]$	0	1	1
$n^3 \equiv ?[3]$	0	1	2
$n^4 \equiv ?[3]$	0	1	1
$2n^2 \equiv ?[3]$	0	2	2
$2n \equiv ?[3]$	0	2	1
$n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv ?[3]$	1	1	1

نتيجة : لا توجد أي قيمة للعدد الطبيعي n حيث $n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv 0[3]$

التمرين ــ 66

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^3 \equiv x[3]$

2 ــ ما هي قيم العدد الصحيح x حيث $x^3 \equiv x[4]$

3 ــ إستنتج قيم x حيث $x^3 \equiv x[12]$

الحـل ـ 66

1 ـ

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$x^3 \equiv ?[3]$	0	1	2

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^3 \equiv x[3]$

2 ـ

$x \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$x^3 \equiv ?[4]$	0	1	0	3

إذن : $x^3 \equiv x[4]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$

3 ـ $x^3 \equiv x[12]$ يكافئ $x^3 - x \equiv 0[12]$

يكافئ $\begin{cases} x^3 - x \equiv 0[3] \\ x^3 - x \equiv 0[4] \end{cases}$ (لأن 4 و 3 أوليان فيما بينهما)

يكافئ $\begin{cases} x^3 \equiv x[3] \\ x^3 \equiv x[4] \end{cases}$

يكافئ $x^3 \equiv x[4]$ لأن الشرط $x^3 \equiv x[3]$ محقق دائما .

يكافئ $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$

التمرين ـ 67

a عدد صحيح .

1 ـ ما هي البواقي الممكنة لقسمة a^4 على 5

2 ـ إستنتج ان المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$ لا تقبل حلولا في Z^2

الحـل ـ 67

1 ـ

$a \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$a^4 \equiv ?[5]$	0	1	1	1	1

إذن : البواقي الممكنة لقسمة a^4 على 5 هي $\{0 ; 1\}$

2 ـ إذا وجدت ثنائية $(x ; y)$ من $Z \times Z$ حلا للمعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$

فإن : $x^4 + 781 \equiv 3y^4[5]$

أي : $x^4 + 1 \equiv 3y^4[5]$ .... (1)

الحالة الأولى : $\begin{cases} x^4 \equiv 0[5] \\ y^4 \equiv 0[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $1 \equiv 0[5]$ تناقض

الحالة الثانية : $\begin{cases} x^4 \equiv 0[5] \\ y^4 \equiv 1[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $1 \equiv 3[5]$ تناقض

الحالة الثالثة : $\begin{cases} x^4 \equiv 1[5] \\ y^4 \equiv 0[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $2 \equiv 0[5]$ تناقض

الحالة الرابعة : $\begin{cases} x^4 \equiv 1[5] \\ y^4 \equiv 1[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $2 \equiv 3[5]$ تناقض

نتيجة : لا توجد أي ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $x^4 + 781 \equiv 3y^4[5]$ و خاصة تحقق المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$

ملاحظة : في كل التمارين الموالية نعتبر A مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من أو تساوي 27 و نرفق كل عنصر من A حرفا أبجديا كمايلي :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
21	22	23	24	25	26	27

التمرين ـ 68

نقوم بعملية تشفير الكلمات باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x + 3$ على 28

مثلا : لتشفير الحرف ق لدينا $x = 20$

إذن : y هو باقي قسمة $(20 + 3)$ على 28

منه : $y = 23$

أي تشفير الحرف ق هو م

1 ــ شفر الكلمة (الجزائر)

2 ــ حل تشفير الكلمات التالية : تبضل ؛ لثغوا ثهصاشثث ؛ وذوز

<u>**الحــل ــ 68**</u>

1 ــ

أ	ل	ج	ز	ا	أ	ر	
0	22	4	10	0	0	9	x
3	25	7	13	3	3	12	y = x + 3
ث	ه	د	ص	ث	ث	ش	التشفير

منه : تشفير كلمة الجزائر هو الكلمة : ثهدصثثش

2 ــ لحل تشفير كلمة لدينا : $x + 3 = y[28]$ منه $x = y - 3\ [28]$ كما يلي :

ت	ب	ض	ل	
2	1	14	22	y
27	26	11	19	x = y - 3
ي	و	س	ف	فك التشفير

ملاحظة : إذا كان x سالب نضيف له 28 لأن $28 \equiv 0[28]$

منه : الكلمة تبضل هي تشفير الكلمة "يوسف"

ل	ث	غ	و	ا	ث	ه	ص	ا	ش	ث	ث	
22	3	18	26	0	3	25	13	0	12	3	3	y
19	0	15	23	25	0	22	10	25	9	0	0	x = y - 3
ف	ا	ط	م	ه	ا	ل	ز	ه	ر	ا	ء	فك التشفير

إذن : الكلمة لثغوا ثهصاشثث هو تشفير الكلمة فاطمة الزهراء

و	ذ	و	ز	
26	8	26	10	y
23	5	23	7	x = y - 3
م	ح	م	د	فك التشفير

إذن : الكلمة وذوز هي تشفير لكلمة محمد

<u>**التمرين ــ 69**</u>

لتكن f دالة للمجموعة A في نفسها ترفق كل عنصر x بباقي قسمة $14x + 3$ على 28 شفر الكلمة سكر . ما هو المشكل المطروح ؟

<u>**الحــل ــ 69**</u>

س	ك	ر	
11	21	9	x
17	17	17	باقي قسمة $14x + 3$ على 28
ع	ع	ع	التشفير

$14(11) + 3 = 157$

$14(21) + 3 = 297$

$14(9) + 3 = 129$

نتيجة : كل من الحروف س ، ك ، ر لهم نفس التشفير .

إذن : لا يمكن إجراء عملية التشفير باستعمال الدالة f المعطاة لأنها ليست تقابل من A نحو A

أي يمكن أن يكون $a \neq b$ و لكن $f(a) = f(b)$

<u>**التمرين ــ 70**</u>

نعرف طريقة للتشفير وفقا للدالة f حيث $f(x)$ هو باقي قسمة $11x + 6$ على 28

1 ــ شفر كلمة "تلمسان"

2 ــ حل المعادلة $11x \equiv 1[28]$ (لاحظ أن $11 \times 5 = 55$)

3 ــ بين أن إذا كان $y = f(x)$ فإن $x \equiv 23y + 2[28]$

4 ــ بين أن كل حرفين مختلفين يحولان إلى حرفين مختلفين .
5 ــ حل تشفير الكلمتين : شيكخا ، هغخعب .

الحــل ــ 70

1 ــ

	ن	ا	س	م	ل	ت
x	24	0	11	23	22	2
11 x + 6	270	6	127	259	248	28
باقي قسمة 6 + 11 x على 28	18	6	15	7	24	0
التشفير	غ	خ	ط	د	ن	أ

إذن : الكلمة تلمسان تشفر إلى كلمة أند طخغ

3 ــ $11x \equiv 1[28]$ إذن : $5 \times 11x \equiv 5 \times 1[28]$

أي $55x \equiv 5[28]$

أي $-x \equiv 5[28]$ لأن $55 = 2(28) - 1$

منه $x \equiv -5[28]$

أي $x \equiv 23[28]$

منه : $x = 28k + 23$ حيث $k \in IN$

تحقيق : إذا كان $x = 28k + 23$ فإن : $11x = 11(28k + 23)$

أي : $11x = 28(11k) + 253$

منه : $11x \equiv 253[28]$

أي : $11x \equiv 1[28]$ محقق .

3 ــ $y = f(x)$ إذن : $11x + 6 \equiv y[28]$

منه $23(11x + 6) \equiv 23y[28]$

منه $253x + 138 \equiv 23y[28]$

منه $x + 26 \equiv 23y[28]$ لأن $\begin{cases} 253 \equiv 1[28] \\ 138 \equiv 26[28] \end{cases}$

منه $x \equiv 23y - 26[28]$

منه $x \equiv 23y + 2[28]$ لأن $-26 \equiv 2[28]$

4 ــ ليكن x ، x' ، y ، y' أربعة عناصر من المجموعة A حيث $y' = y$ و $y' = f(x')$ و $y = f(x)$

إذن : $\begin{cases} x' \equiv 23y' + 2[28] \\ x \equiv 23y' + 2[28] \end{cases}$

منه $x' - x \equiv 0[28]$

أي $x' \equiv x[28]$

لكن $\begin{cases} 0 \le x' \le 27 \\ 0 \le x \le 27 \end{cases}$

إذن : $x' = x$

نتيجة : كل عددين مختلفين x' و x لهما صورتين مختلفتين بالدالة f

إذن : كل حرفين مختلفين يحولان إلى حرفين مختلفين .

5 ــ حل تشفير كلمة شيكخا

	ا	خ	ك	ي	ش
y	0	6	21	27	12
23 y + 2	2	140	485	623	278
باقي قسمة 2 + 23 y على 28	2	0	9	7	26
فك التشفير	ت	ا	ر	د	و

إذن : الكلمة شيكخا هي تشفير لكلمة "ودرات"

	هـ	غ	خ	ع	ب
y	25	18	6	17	1
$23y+2$	575	416	140	393	25
باقي قسمة $23y+2$ على 28	17	24	0	1	25
فك التشفير	ع	ن	ا	ب	هـ

نتيجة : الكلمة هغخعب هي تشفير لكلمة " عنابه "

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

k عدد طبيعي . نضع $n = 2310k + 2100$

1 ــ برهن أن إذا غيرنا أحد أرقام العدد n دون تغيير رقم آحاده يكون دائما غير أولي

2 ــ برهن أن $n+1 \equiv 0[11]$ ؛ $n \equiv 0[3]$ ؛ $n \equiv 0[5]$ ؛ $n \equiv 0[7]$

3 ــ إستنتج أن n يكون غير أولي مهما غيرنا أي رقم من أرقامه

4 ــ هل توجد أعداد أخرى تحقق هذه الخاصية ؟

الحـل ــ 1

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي k فإن رقم آحاد العدد $2310k$ هو 0

إذن : رقم آحاد العدد $n = 2310k + 2100$ هو 0 إذن n مضاعف 10

منه : مهما غيرنا أحد أرقام العدد n بإستثناء رقم آحاده المعدوم فإن n يبقى مضاعف 10 إذن : n غير أولي

2 ــ $\begin{cases} 2310 \equiv 0[11] \\ 2100 \equiv 10[11] \\ 1 \equiv 1[11] \end{cases}$ منه : $2310k + 2100 + 1 \equiv 0 + 10 + 1[11]$

أي : $n + 1 \equiv 0[11]$

$\begin{cases} 2310 \equiv 0[3] \\ 2100 \equiv 0[3] \end{cases}$ منه : $2310k + 2100 \equiv 0[3]$

أي : $n \equiv 0[3]$

$\begin{cases} 2310 \equiv 0[5] \\ 2100 \equiv 0[5] \end{cases}$ إذن : $2310k + 2100 \equiv 0[5]$

أي : $n \equiv 0[5]$

$\begin{cases} 2310 \equiv 0[7] \\ 2100 \equiv 0[7] \end{cases}$ إذن : $2310k + 2100 \equiv 0[7]$

أي : $n \equiv 0[7]$

3 ــ لدينا رقم آحاد العدد n يساوي 0 منه إذا غيرنا رقم آحاده فإن العدد n يكون مساويا إلى أحد القيم التالية :

$n+1$: لكن $n+1 \equiv 0[11]$

$n+2$: لكن $n+2$ زوجي لأن n زوجي

$n+3$: لكن $n+3$ مضاعف 3 لأن n مضاعف 3

$n+4$: لكن $n+4$ زوجي لأن n زوجي

$n+5$: لكن $n+5$ مضاعف 5 لأن $n \equiv 0[5]$

$n+6$: لكن $n+6$ زوجي لأن n زوجي

$n+7$: لكن $n+7$ مضاعف 7 لأن $n \equiv 0[7]$

$n+8$: لكن $n+8$ زوجي لأن n زوجي

$n+9$: لكن $n+9$ مضاعف 3 لأن $n \equiv 0[3]$

نتيجة : مهما غيرنا رقم آحاد العدد n فإن n يبقى ليس أولي .

إذن : مهما غيرنا أي رقم من أرقام العدد n فإن n ليس أولي .

4 ـ يكفي أن نضرب العدد n في قوة للعدد 10 حتى نحصل على أعداد طبيعية تحقق أن مهما غيرنا أحد أرقامها فإنها ليست أولية أي كل الأعداد الطبيعية التي تكتب من الشكل $n = 10^p(2310k + 2100)$ حيث $p \in IN$ تحقق هذه الخاصية

<u>التمرين ـ 2</u>

1 ـ برهن أن كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر من أو يساوي 6 هو قاسم للعدد $(n-1)!$

حيث $(n-1)! = 1 \times 2 \times ..... \times (n-1)$

2 ـ هل هذه الخاصية صحيحة من أجل n عدد أولي ؟

<u>الحل ـ 2</u>

1 ـ ليكن n عدد غير أولي حيث $n \geq 6$

إذن : n يقبل تحليل إلى جداء أعداد من الشكل $a_1 \times a_2 \times .... \times a_p$

حيث $2 \leq a_i \leq n/2$ (هي قواسم العدد n)

منه : من أجل كل i فإن $2 \leq a_i < (n-1)$

إذن : $a_1 \times a_2 \times .... \times a_p$ يقسم $2 \times 3 \times .... \times (n-1)$

أي n يقسم $(n-1)!$

2 ـ إذا كان n أولي فإن الخاصية ليست صحيحة لأن العدد n لا يقسم أي عامل من العوامل التي تظهر في $(n-1)!$ فإذن لا يمكن أن يقسم جداؤها لأنه لا يقبل تحليل

<u>التمرين ـ 3</u>

ليكن p عدد أولي أكبر تماما من 3 . نضع $n = 2 \times 3 \times 4 \times .... \times p$

برر أن الأعداد $n+2$ ؛ $n+3$ ؛ $n+4$ ؛ $n+p$ ليست أولية

<u>الحل ـ 3</u>

$n + 2 = 2 \times 3 \times 4 \times ....\times p + 2 = 2(3 \times 4 \times ....\times p + 1)$ إذن : $n+2$ ليس أولي

$n + 3 = 2 \times 3 \times 4 \times ....\times p + 3 = 3(2 \times 4 \times 5 \times ....\times p + 1)$ إذن : $n+3$ ليس أولي

$n + 4 = 2 \times 3 \times 4 \times ....\times p + 4 = 4(2 \times 3 \times 5 \times ....\times p + 1)$ إذن : $n+4$ ليس أولي

$n + p = 2 \times 3 \times 4 \times ....\times p + p = p[2 \times 3 \times 4 \times ....\times (p-1) + 1]$ إذن : $n+p$ ليس أولي

<u>التمرين ـ 4</u>

a و b عددان طبيعيان أوليان حيث $2 < a < b$

1 ـ عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من $Z^* \times Z^*$ التي تحقق $x^2 - y^2 = (a b)^2$

2 ـ عين هذه الثنائيات من أجل $(a ; b) = (2 ; 7)$

<u>الحل ـ 4</u>

1 ـ $x^2 - y^2 = (a b)^2$ يكافئ $(x - y)(x + y) = a^2 b^2$

لنبحث عن قواسم العدد $a^2 b^2$ كمايلي :



إذن : القواسم هي $\{a^2 b^2 ; a^2 b ; a^2 ; a b^2 ; a ; a b ; b^2 ; b ; 1\}$

بما أن $x - y < x + y$ فإن نبحث عن تحليل لـ $a^2 b^2$ إلى جداء عاملين $\alpha \beta$ حيث $\alpha < \beta$

كمايلي : $1 \times a^2 b^2$ ؛ $b \times a^2 b$ ؛ $a \times b^2 a$ ؛ $a^2 \times b^2$

إذن : إما $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = a^2 b^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = b \\ x + y = a^2 b \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = a \\ x + y = a b^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = a^2 \\ x + y = b^2 \end{cases}$

أي إما $\begin{cases} 2x = 1 + a^2 b^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = b + a^2 b \\ y = x - b \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = a + a b^2 \\ y = x - a \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = a^2 + b^2 \\ y = x - a^2 \end{cases}$

أي

$$(x ; y) \in \left\{ \left(\frac{1 + a^2 b^2}{2} ; \frac{1 + a^2 b^2}{2} - 1\right) ; \left(\frac{b + a^2 b}{2} ; \frac{b + a^2 b}{2} - b\right) ; \left(\frac{a + a b^2}{2} ; \frac{a + a b^2}{2} - a\right) ; \left(\frac{a^2 + b^2}{2} ; \frac{a^2 + b^2}{2} - a^2\right) \right\}$$

2 ـ من أجل $(a ; b) = (3 ; 7)$ فإن : $(x ; y) \in \{(221 ; 220) ; (35 ; 28) ; (75 ; 72) ; (29 ; 20)\}$

التمرين ـ 5

1 ـ برهن أن كل مجموع 5 أعداد طبيعية فردية متتالية ليس أولي .

2 ـ في الحالة العامة ، من أجل $n \geq 2$ هل يمكن أن يكون مجموع n عدد طبيعي فردي متتابع أوليا ؟

الحل ـ 5

1 ـ ليكن k عدد طبيعي . نضع $n = 2k + 1$ إذن n عدد طبيعي فردي .

منه : $S = n + (n + 2) + (n + 4) + (n + 6) + (n + 8)$ هو مجموع 5 أعداد فردية متتابعة .

$$= 5n + 20$$
$$= 5(2k + 1) + 20$$
$$= 10k + 25$$
$$= 5(2k + 5)$$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي فردي n فإن 5 يقسم S

منه : مجموع 5 أعداد فردية متتابعة هو دائما ليس أولي

2 ـ نضع $p = 2k + 1$ و $S = p + (p + 2) + (p + 4) + \dots + [p + 2(n - 1)]$

$$= np + [2 + 4 + 6 + \dots + 2(n - 1)]$$
$$= np + 2[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)]$$
$$= np + 2\left[\frac{1 + n - 1}{2}(n - 1)\right]$$
$$= np + n(n - 1)$$
$$= n[p + n - 1]$$

إذن : S يقبل تحليل من الشكل $n(p + n - 1)$

منه S ليس أولي .

نتيجة : مجموع n عدد طبيعي فردي متتابع لا يمكن أن يكون أولي $(n \geq 2)$

التمرين ـ 6

نسمي أعداد Mersenne الأعداد الطبيعية الأولية التي تكتب من الشكل $N = 2^p - 1$ حيث $p \in N$

a و b عددان طبيعيان غير معدومان و يختلفان عن 1

1 ـ بسط المجموع $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$

2 ـ برهن أن إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإن $a = 2$

الحل ـ 6

1 ـ $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ هو مجموع n حد متتابع لمتتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1

$$= 1 \times \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

إذن : $S = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن $(a - 1)$ يقسم $a^n - 1$ لأن S عدد طبيعي .

لكن إذا كان $a^n - 1$ أونيا فإنه لا يقبل قواسم ماعدا 1 و نفسه

إذن : $a - 1 = 1$ أي $a = 2$

التمرين ـ 7

a و b عددان طبيعيان . نضع $n = a^4 + 4b^4$

1 ـ برهن أن : $n = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

2 ـ برهن أن من أجل $b \geq 2$ فإن n لا يمكن أن يكون أولي

3 ـ من أجل $b = 1$ هل يمكن أن يكون n أولي ؟

4 ـ برهن أن العدد $1207^4 + 4^{1205}$ ليس أولي .

الحل ـ 7

1 ـ $(a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = a^4 + 2a^2b^2 - 2a^3b + 2a^2b^2 + 4b^4 - 4ab^3 + 2a^3b + 4ab^3 - 4a^2b^2$

$$= a^4 + 4b^4$$
$$= n$$

2 ـ $a^2 + 2b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab + b^2$

$= (a-b)^2 + b^2$

بما أن $\left.\begin{matrix} b \geq 2 \\ (a-b)^2 \geq 0 \end{matrix}\right\}$ فإن $(a-b)^2 + b^2 \geq 4$

أي $a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 4$

من جهة أخرى : $a^2 + 2b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab + b^2$
$= (a+b)^2 + b^2$

بما أن $\left.\begin{matrix} b^2 \geq 4 \\ (a+b)^2 > 0 \end{matrix}\right\}$ فإن $(a+b)^2 + b^2 > 4$

أي $a^2 + 2b^2 + 2ab > 4$

نتيجة : إذا كان $b \geq 2$ فإن n يحلل إلى جداء عاملين كل منهما يختلف عن 1 إذن لا يمكن أن يكون n أولي .

3 ـ من أجل $b = 1$ فإن : $n = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$
$= (a^2 + 2a + 2)[(a-1)^2 + 1]$

إذا كان $a = 1$ فإن : $n = (1+2+2)(0+1) = 5$

إذن : n أولي

إذا كان $a = 0$ فإن : $n = 2 \times 2 = 4$

إذن : n ليس أولي

إذا كان $a > 1$ فإن $\left.\begin{matrix} (a-1)^2 + 1 > 1 \\ a^2 + 2a + 2 > 1 \end{matrix}\right\}$

إذن : n يحلل إلى جداء عاملين كل منهما أكبر من 1

منه : لا يمكن لــ n أن يكون أولي . إلا من أجل $a = 1$

4 ـ $1207^4 + 4^{1205} = 1207^4 + 4 \times (4^{1204})$
$= 1207^4 + 4 \times (4^{301})^4$

نضع $\left\{\begin{matrix} a = 1207 \\ b = 4^{301} \end{matrix}\right.$ إذن حسب السؤال (1) فإن $a^4 + 4b^4$ ليس اولي

أي $1207^4 + 4^{1205}$ ليس أولي

<u>التمرين ــ 8</u>

q عدد أولي عين المجموع S و الجداء P لكل القواسم الموجبة للعدد q^n حيث n عدد طبيعي غير معدوم

<u>الحــل ــ 8</u>

عدد القواسم الموجبة للعدد q^n هو $(n+1)$ و هي : $\{q^n \ldots\ldots ; q^3 ; q^2 ; q ; 1\}$

منه : $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

$P = 1 \times q \times q^2 \times \ldots \times q^n = q^{1+2+\ldots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

<u>التمرين ــ 9</u>

ليكن p عدد أولي .

أثبت أن يكون p قاسما للعدد 1806 إذا و فقط إذا كان $p - 1$ قاسما للعدد 1806

<u>الحــل ــ 9</u>

لنبحث عن قواسم العدد 1806 :

1806	2
903	3
301	7
43	43
1	

إذن : قواسم العدد 1806 هي حسب الجدول التالي :

1								2							
1				3				1				3			
1		7		1		7		1		7		1		7	
1	43	1	43	1	43	1	43	1	43	1	43	1	43	1	43

$\{1 ; 43 ; 7 ; 301 ; 3 ; 129 ; 21 ; 903 ; 2 ; 86 ; 14 ; 602 ; 6 ; 258 ; 42 ; 1806\}$

منه القواسم الأولية للعدد 1806 هي $\{2 ; 3 ; 7 ; 43\}$

لاحظ أن الأعداد $42 ; 6 ; 2 ; 1$ هي قواسم للعدد 1806 و هي ناتجة عن طرح 1 من القواسم الأولية .

إذن : إذا كان p أولي و p يقسم 1806 فإن p - 1 يقسم 1806

هل : إذا كان p - 1 يقسم 1806 و p أولي فإن p يقسم 1806 ؟

الجواب نعم لأن كل من الأعداد {42 ; 6 ; 4 ; 3} تحقق هذه الشروط .

إذن : يكون p أولي قاسم لـ 1806 إذا و فقط إذا كان p - 1 قاسم لــ 1806

التمرين ــ 10

a و b عددان طبيعيان . نضع $n = 2^a \times 3^b$

1 ــ عين عدد القواسم الموجبة للعدد n

2 ــ عين n علما أن عدد قواسم العدد 2 n هو ضعف عدد قواسم العدد n

الحــل ــ 10

1 ــ $n = 2^a \times 3^b$ إذن : عدد قواسم n هو $(a+1)(b+1)$

2 ــ $2n = 2^{a+1} \times 3^b$ إذن : عدد قواسم 2 n هو $(a+1+1)(b+1) = (a+2)(b+1)$

يكون عدد قواسم 2 n هو ضعف عدد قواسم n إذا و فقط إذا كان :

$(a+2)(b+1) = 2(a+1)(b+1)$

أي : $a + 2 = 2(a+1)$

أي : $a + 2 = 2a + 2$

أي : $a = 0$ منه : $n = 3^b$ حيث $b \in IN$

التمرين ــ 11

ليكن n = 200

1 ــ عين مجموعة القواسم الموجبة للعدد n

ليكن N عدد قواسم العدد n و p جداء كل هذه القواسم

2 ــ تحقق من صحة العلاقة : $n^N = p^2$ .... (1)

ليكن $n = 2^a \times 5^b$ حيث a و b عددان طبيعيان .

3 ــ أحسب الجداء p لكل قواسم العدد n

4 ــ هل العلاقة (1) محققة ؟

5 ــ عين العدد n من الشكل $2^a \times 5^b$ علما أن $p = 20^{42}$

الحــل ــ 11

1 ــ $200 = 25 \times 8 = 2^3 \times 5^2$

منه قواسم 200 هي {200 ; 40 ; 8 ; 100 ; 20 ; 4 ; 50 ; 10 ; 2 ; 25 ; 5 ; 1}

2 ــ N = 12 (عدد قواسم 200)

$$p = 1 \times 5 \times 25 \times 2 \times 10 \times 50 \times 4 \times 20 \times 100 \times 8 \times 40 \times 200$$
$$= 5 \times 5^2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5^2 \times 2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5 \times 5^2 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^3 \times 5 \times 2^3 \times 5^2$$
$$= 2^{18} \times 5^{12}$$

$p = 2^{18} \times 5^{12}$ إذن : $p^2 = 2^{36} \times 5^{24}$

$n^N = (2^3 \times 5^2)^{12}$ إذن : $n^N = 2^{36} \times 5^{24}$

نتيجة : العلاقة $n^N = p^2$ محققة .

3 ــ $p = (2^0 \times 5^0 \times 2^0 \times 5^1 \times \ldots \times 2^0 \times 5^b) \times (2^1 \times 5^0 \times 2^1 \times 5^1 \times \ldots \times 2^1 \times 5^b) \times \ldots \times (2^a \times 5^0 \times 2^a \times 5^1 \times \ldots \times 2^a \times 5^b)$

$$= (2^{0(b+1)} \times 5^{0+1+\ldots+b}) \times (2^{1(b+1)} \times 5^{0+1+2..+b}) \times \ldots \times (2^{a(b+1)} \times 5^{0+1+\ldots+b})$$

$$= \left(2^0 \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \times \left(2^{b+1} \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \times \ldots \times \left(2^{a(b+1)} \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right)$$

$$= 2^{0+(b+1)+2(b+1)+..+a(b+1)} \times 5^{(a+1)\frac{b(b+1)}{2}}$$

$$= 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}} \times 5^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}}$$

4 ــ $p^2 = 2^{a(a+1)(b+1)} \times 5^{b(a+1)(b+1)}$

و $n^N = (2^a \times 5^b)^{(a+1)(b+1)}$

$= 2^{a(a+1)(b+1)} \times 5^{b(a+1)(b+1)}$

إذن : العلاقة (1) محققة دائما .

5 ــ $p = 20^{42}$ إذن : $p^2 = 20^{84}$

أي : $p^2 = 4^{84} \times 5^{84}$

أي : $p^2 = 2^{168} \times 5^{84}$

منه : $\begin{cases} (2) \ ..... \ a(a+1)(b+1) = 168 \\ (3) \ ..... \ b(a+1)(b+1) = 84 \end{cases}$

من العلاقة (3) : $(a+1)(b+1) = 84/b$ (b قاسم لـ 84)

إذن : العلاقة (2) تصبح : $a \times \frac{84}{b} = 168$

أي : $a/b = 2$

منه : $a = 2b$

المساواة (3) تصبح إذن : $b(2b+1)(b+1) = 84$

لنبحث عن تحليل العدد 84 إلى ثلاث عوامل من بينها عاملين متتابعين b و b + 1

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

إذن : $84 = 3 \times 7 \times 4$

منه : $b = 3$ ؛ $2b + 1 = 7$ ؛ $b + 1 = 4$

إذن : $a = 2b = 6$

نتيجة : العدد المطلوب هو $n = 2^6 \times 5^3$

تحقيق : $n^N = (2^6 \times 5^3)^{28} = 2^{168} \times 5^{84} = 4^{84} \times 5^{84} = 20^{84}$ إذن : $p^2 = 20^{84}$

التمرين ــ 12

n عدد طبيعي غير معدوم حيث N هو عدد قواسمه الموجبة .

برهن أن إذا كان N فردي فإن n هو مربع تام .

الحــل ــ 12

ليكن $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_i^{\alpha_i}$ حيث p_k : أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_k أسس طبيعية .

لدينا $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_i + 1)$

إذن : إذا كان N فردي فإن كل من الأعداد $(\alpha_1 + 1)$ ، $(\alpha_2 + 1)$ ، .... ، $(\alpha_i + 1)$ هي أعداد فردية .

و عليه فإن الأسس α_1 ، α_2 ، ..... α_i زوجية .

منه : العدد n هو مربع تام

التمرين ــ 13

x ، y عددان طبيعيان حيث $0 < x \leq y$

نضع $pgcd(x ; y) = d$ و $ppcm(x ; y) = m$

نريد تعيين x و y حيث $m^2 - 5d^2 = 2000$ ....(α)

1 ــ برهن أن إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ تحقق المعادلة (α) فإن d^2 هو قاسم للعدد 2000

2 ــ حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتج القواسم المربعة التامة له

3 ــ برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي إذن القيم الممكنة لــ d

4 ــ إستنتج القيم الممكنة للعددين x و y

الحــل ــ 13

1 ــ $\begin{cases} d \text{ يقسم } x \\ d \text{ يقسم } y \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} d^2 \text{ يقسم } x^2 \\ d^2 \text{ يقسم } y^2 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} d^2 \text{ يقسم } x^2 \\ d^2 \text{ يقسم } 5y^2 \end{cases}$ إذن : d^2 يقسم $x^2 - 5y^2$

إذا كان $(x ; y)$ حل للمعادلة (α) فإن : $x^2 - 5y^2 = 2000$

إذن : d^2 يقسم 2000

2 ــ $2000 = 20 \times 100 = 4 \times 5 \times 4 \times 25 = 2^4 \times 5^3$

منه القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي :

$\{5^2 \times 2^4 ; 2^4 ; 5^2 \times 2^2 ; 2^2 ; 5^2 ; 1\}$ أي $\{(20)^2 ; (4)^2 ; (10)^2 ; (2)^2 ; (5)^2 ; 1\}$

3 ــ $m^2 - 5d^2 = 2000$ إذن : $m^2 = 5d^2 + 2000$

أي $m^2 = 5(d^2 + 400)$

منه : 5 يقسم m^2

لكن 5 أولي .

إذن 5 يقسم m

5 يقسم m إذن : $m = 5k$ حيث $k \in IN$

المعادلة (α) تصبح إذن : $(5k)^2 - 5d^2 = 2000$

أي $5d^2 = 25k^2 - 2000$

أي $d^2 = 5k^2 - 400$

أي $d^2 = 5(k^2 - 80)$

إذن : 5 يقسم d^2

بما أن 5 أولي فإن 5 يقسم d

نتيجة : 5 يقسم d و 5 يقسم m إذن : 5 قاسم مشترك لـ d و m

منه القيم الممكنة لـ d^2 هي $\{20^2 ; 10^2 ; 5^2\}$

أي القيم الممكنة لـ d هي $\{20 ; 10 ; 5\}$

4 ــ $m^2 - 5d^2 = 2000$ إذن : $m^2 = 2000 + 5d^2$

m	$m^2 = 2000 + 5d^2$	d
/	مرفوض لانه ليس مربع تام $m^2 = 2000 + 125 = 2125$	5
50	$m^2 = 2000 + 500 = (50)^2$	10
/	مرفوض لأنه ليس مربع تام $m^2 = 2000 + 2000 = 4000$	20

نتيجة : الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(d ; m) = (10 ; 50)$

إذن : $(x ; y) \in \{(10 ; 50) ; (50 ; 10)\}$ لكن $x < y$ إذن $(x ; y) = (10 ; 50)$

التمرين ــ 14

1 ــ حلل العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية

α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha < \beta$

2 ــ حل في المجموعة $N \times N$ المعادلة $\alpha \beta = 105$

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و غير أوليين فيما بينهما

نضع $pgcd(a ; b) = \lambda$ و $ppcm(a ; b) = \gamma$

3 ــ عين a و b حيث $\begin{cases} 95\lambda + 19\gamma = 1995 \\ \lambda < 7 \end{cases}$

الحـل ــ 14

1 ــ

1995	3
665	5
133	7
19	19
1	

105	3
35	5
7	7
1	

$1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$ $\qquad$ $105 = 3 \times 5 \times 7$

2 ــ قواسم 105 هي $\{105 ; 15 ; 21 ; 3 ; 35 ; 5 ; 7 , 1\}$

إذن : $\alpha \beta = 105$ تكافئ $(\alpha ; b) \in \{(1 ; 105) ; (7 ; 15) ; (5 ; 21) ; (35 ; 3) ; (3 ; 35) ; (21 ; 5) ;$
$(15 ; 7) ; (105 ; 1)\}$

3 ــ λ يقسم γ إذن : $\begin{cases} \lambda \text{ يقسم } 95\lambda \\ \lambda \text{ يقسم } 19\gamma \end{cases}$ منه λ يقسم $95\lambda + 19\gamma$

أي λ يقسم 1995

a و b ليس أوليان فيما بينهما إذن : $1 < \lambda$

$\begin{cases} 1 < \lambda < 7 \\ \lambda \text{ يقسم } 1995 \end{cases}$ إذن : $\lambda \in \{3 ; 5\}$

لدينا : $95\lambda + 19\gamma = 1995$ إذن : $19\gamma = 1995 - 95\lambda$

λ	$19\gamma = 1995 - 95\lambda$	γ
3	$1995 - 285 = 1710$	$1710/19 = 90$
5	$1995 - 475 = 1520$	$1520/19 = 80$

نتيجة : $(\alpha ; \beta) \in \{(3 ; 4)\}$

2 ـ a ، b ، c ، d ، e حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها r

إذن : $b = ar$ ؛ $c = ar^2$ ؛ $d = ar^3$ ؛ $e = ar^4$

منه : $28a^3 = e - b$ تكافئ $28a^3 = ar^4 - ar$

تكافئ $28a^3 = ar(r^3 - 1)$

تكافئ $28a^2 = r(r^3 - 1)$ لأن $a \neq 0$

تكافئ $r = 4$ و $a = 3$ (حسب السؤال (1))

نتيجة : $a = 3$ ؛ $b = 12$ ؛ $c = 48$ ؛ $d = 192$ ؛ $e = 768$

تحقيق : $28a^3 = 28 \times 27 = 756$

$e - b = 768 - 12 = 756$

التمرين ـ 16

1 ـ α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما حيث $\alpha > \beta$

عين α و β حيث $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$

2 ـ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها R حيث u_0 و R عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0 < R$

أوجد u_0 و R حتى يكون $35u_0^2 + 19u_1 - u_0R^3 = 0$

3 ـ نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ أحسب S_n بدلالة n

4 ـ أوجد قيم n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 30

الحـل ـ 16

1 ـ $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ إذن : α يقسم 35β

بما أن α و β أوليان فيما بينهما فإن α يقسم 35

منه : $\alpha \in \{1 ; 5 ; 7 ; 35\}$

لكن $\alpha > 1$ لأن $\beta \neq 0$

إذن : $\alpha \in \{5 ; 7 ; 35\}$

من أجل $\alpha = 5$: $5(25 - 19) = 35\beta$

إذن : $25 - 19 = 7\beta$

أي : $6 = 7\beta$ مستحيل .

من أجل $\alpha = 7$: $7(49 - 19) = 35\beta$

إذن : $49 - 19 = 5\beta$

أي : $\beta = 6$

من أجل $\alpha = 35$: $35(35^2 - 19) = 35\beta$

منه : $1206 = \beta$ مرفوض لأن $\alpha > \beta$

نتيجة : القيم الممكنة لـ α و β هي : $\alpha = 7$ و $\beta = 6$

2 ـ $35u_0^2 + 19u_1 - u_0R^3 = 0$ يكافئ $35u_0^2 = u_0R^3 - 19u_1$

يكافئ $35u_0^2 = u_0R^3 - 19u_0R$ لأن $u_1 = u_0R$

يكافئ $35u_0^2 = u_0R(R^2 - 19)$

يكافئ $35u_0 = R(R^2 - 19)$ لأن $u_0 \neq 0$

يكافئ $u_0 = 6$ و $R = 7$ (حسب السؤال (1))

3 ـ $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$= u_0 \times \frac{R^{n+1} - 1}{R - 1}$

$= 6 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}$

$= 7^{n+1} - 1$

4 ـ يكون S_n قابلا للقسمة على 30 إذا و فقط إذا كان S_n مضاعفا لـ 5 و مضاعفا لـ 6

لدينا : $7 \equiv 1[6]$ إذن : $7^{n+1} \equiv 1[6]$

منه : $7^{n+1} - 1 \equiv 0[6]$

إذن : S_n مضاعف 6

لنعين إذن قيم n حتى يكون S_n مضاعفا لـــ 5 كمايلي :

إذن : $7 \equiv 2[5]$ $7^n \equiv 2^n[5]$

منه : $7^{n+1} \equiv 2 \times 2^n[5]$

ندرس بواقي قسمة 2^n على 5

$2^0 \equiv 1[5]$

$2^1 \equiv 2[5]$

$2^2 \equiv 4[5]$

$2^3 \equiv 3[5]$

منه : $2^4 \equiv 1[5]$

$n \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$2^n \equiv ?[5]$	1	2	4	3
$2 \times 2^n \equiv ?[5]$	2	4	3	1
$2 \times 2^n - 1 \equiv ?[5]$	1	3	2	0

نتيجة : يكون $7^{n+1} - 1 \equiv 0[5]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 3[4]$

أي يكون S_n قابلا للقسمة على 30 إذا و فقط إذا كان $n = 4k + 3$ حيث $k \in IN$ و هي قيم n المطلوبة .

<u>التمرين ـــ 17</u>

1 ـــ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ؛ 32785 ؛ 2905

2 ـــ حل في $Z \times Z$ المعادلة $7x + 6y = 79$ باستعمال المساواة $72 + 7 = 79$

إشترى نادي كرة يد ملابس رياضية . إذا علمت أن ثمن بدلة لاعب هو 2905 DA و ثمن بدلة لاعبة هو 2490 DA و أن النادي قد دفع مبلغ 32785 DA في المجموع . فما هو عدد اللاعبين و اللاعبات ؟

<u>الحـل ـــ 17</u>

1 ـــ

2490	2
1245	3
415	5
83	83
1	

2905	5
581	7
83	83
1	

32785	5
6557	83
79	79
1	

نتيجة : القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ؛ 2905 ؛ 32785 هو $83 \times 5 = 415$

2 ـــ $72 + 7 = 79$ إذن : $7(1) + 6(12) = 79$

إذن : المعادلة $7x + 6y = 79$ تكافئ $7x + 6y = 7(1) + 6(12)$

تكافئ $7x - 7(1) = 6(12) - 6y$

تكافئ $7(x-1) = 6(12-y)$

إذن : 6 يقسم $x - 1$

منه : $x - 1 = 6k$ حيث $k \in Z$

إذن : $7 \times 6k = 6(12 - y)$

إذن : $12 - y = 7k$

نتيجة : $\begin{cases} x - 1 = 6k \\ 12 - y = 7k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 1 + 6k \\ y = 12 - 7k \end{cases}$ حيث $k \in Z$

3 ـــ ليكن x عدد اللاعبين و y عدد اللاعبات .

إذن : $2905x + 2490y = 32785$

أي : $7x + 6y = 79$ (بالقسمة على 415)

إذن : الثنائية $(x ; y)$ هي حل للمعادلة $7x + 6y = 79$

منه : $x = 1 + 6k$ و $y = 12 - 7k$ حيث $k \in Z$

لكن x و y أعداد طبيعية إذن $x \geq 0$ و $y \geq 0$

منه : $\begin{cases} 1 + 6k \geq 0 \\ 12 - 7k \geq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} k \geq -1/6 \\ k \leq 12/7 \end{cases}$

أي $\begin{cases} k \in IN \\ k \leq 1 \end{cases}$ لأن k عدد صحيح .

إذن : $k \in \{0 ; 1\}$

نتيجة : إما $(x ; y) = (1 ; 12)$: لاعب و 12 لاعبة .
أو $(x ; y) = (7 ; 5)$: 7 لاعبين و 5 لاعبات .

التمرين ــ 18

1 ــ عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ؛ 1497 ؛ 2994

لتكن المعادلة $1996\,x - 1497\,y = 2994$ .....(1) في $Z \times Z$

2 ــ اثبت أن إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف 3 و y مضاعف 2 ثم إستنتج هذه الحلول

3 ــ عين حلول المعادلة (1) التي تحقق $x\,y = 1950$

الحــل ــ 18

1 ــ

1996	2
998	2
499	499
1	

1497	3
499	499
1	

2994	2
1497	3
499	499
1	

إذن : القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 هو 499

2 ــ ليكن $(x ; y)$ حل للمعادلة (1)

$1996\,x - 1497\,y = 2994$ إذن : $4\,x - 3\,y = 6$ (بالقسمة على 499)

منه $\begin{cases} 4\,x = 3\,y + 6 \\ 3\,y = 4\,x - 6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} (1) \ldots\ldots 4\,x = 3(y + 2) \\ (2) \ldots . 3\,y = 2(2\,x - 3) \end{cases}$

منه $\begin{cases} 3 \text{ يقسم } 4\,x \\ 2 \text{ يقسم } 3\,y \end{cases}$

أي $\begin{cases} 3 \text{ يقسم } x \text{ لأن } 3 \text{ أولي مع } 4 \\ 2 \text{ يقسم } y \text{ لأن } 2 \text{ أولي مع } 3 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x \text{ مضاعف } 3 \\ y \text{ مضاعف } 2 \end{cases}$

نضع $x = 3\,k$ حيث $k \in Z$ إذن المساواة (1) تصبح : $4 \times 3\,k = 3(y + 2)$

منه : $4\,k = y + 2$

أي : $y = 4\,k - 2$

نتيجة : حلول المعادلة (1) في $Z \times Z$ هي الثنائيات $\{(3\,k ; 4\,k - 2)\}$ حيث $k \in Z$

3 ــ لدينا $\begin{cases} x = 3\,k \\ y = 4\,k - 2 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

$x\,y = 1950$ يكافئ $3\,k(4\,k - 2) = 1950$

يكافئ $6\,k(2\,k - 1) = 1950$

يكافئ $k(2\,k - 1) = 325$

يكافئ $2\,k^2 - k - 325 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الصحيح k

$\Delta = 1 + 8(325) = 2601 = (51)^2$

$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1 - 51}{4} = \dfrac{-50}{4} = -\dfrac{25}{2} & \text{مرفوض} \\ k_2 = \dfrac{1 + 51}{4} = \dfrac{52}{4} = 13 & \text{مقبول} \end{cases}$

$k = 13$ إذن : $\begin{cases} x = 3 \times 13 = 39 \\ y = 4 \times 13 - 2 = 50 \end{cases}$

نتيجة : الثنائية المطلوبة هي $(x ; y) = (39 ; 50)$

تحقيق : $\begin{cases} 39 \times 50 = 1950 \\ 4(39) - 3(50) = 156 - 150 = 6 \end{cases}$

التمرين ـــ 19

1 ـــ حل في $Z \times Z$ المعادلة $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(3 ; 1)$ حل لها .

لتكن في $Z \times Z$ المعادلة $45x - 28y = 130$ ....(1)

2 ـــ بين أن إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف 2 و y مضاعف 5

ثم إستنتج حلول المعادلة (1)

N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام التعداد ذو الأساس 9 و يكتب $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7

3 ـــ عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

الحـل ـــ 19

1 ـــ $\begin{cases} 9x' - 14y' = 13 \\ 9(3) - 14(1) = 13 \end{cases}$ إذن : $9x' - 14y' = 9(3) - 14(1)$

منه $9x' - 9(3) = 14y' - 14(1)$

أي $9(x' - 3) = 14(y' - 1)$

منه 14 يقسم $x' - 3$

أي $x' - 3 = 14k$ حيث $k \in Z$

إذن : $9 \times 14k = 14(y' - 1)$

منه $9k = y' - 1$

نتيجة : $\begin{cases} x' - 3 = 14k \\ y' - 1 = 9k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x' = 14k + 3 \\ y' = 9k + 1 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

2 ـــ ليكن $(x ; y)$ حل للمعادلة (1) إذن $45x - 28y = 130$

منه $\begin{cases} 45x = 28y + 130 \\ 28y = 45x - 130 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 45x = 2(14y + 65) \\ 28y = 5(9x - 26) \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } 45x \\ 5 \text{ يقسم } 28y \end{cases}$

منه $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } x \\ 5 \text{ يقسم } y \end{cases}$ لأن 45 و 2 أوليان فيما بينهما . لأن 5 و 28 أوليان فيما بينهما .

نتيجة : $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } x \\ 5 \text{ يقسم } y \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 2x' \\ y = 5y' \end{cases}$ حيث x' و y' أعداد صحيحة .

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : $45(2x') - 28(5y') = 130$

أي : $2 \times 5(9x' - 14y') = 130$

أي $9x' - 14y' = 13$

منه حسب السؤال (1) $\begin{cases} x' = 14k + 3 \\ y' = 9k + 1 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} x = 2(14k + 3) \\ y = 5(9k + 1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 28k + 6 \\ y = 45k + 5 \end{cases}$ هي حلول المعادلة (1) حيث $k \in Z$

3 ـــ $N = \overline{2\alpha\alpha3}$ في النظم ذو الأساس 9 إذن : $\begin{cases} 0 \le \alpha \le 8 \\ 2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = N \end{cases}$

$N = \overline{5\beta\beta6}$ في النظام ذو الأساس 7 إذن : $\begin{cases} 0 \le \beta \le 6 \\ 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6 = N \end{cases}$

نتيجة : $\begin{cases} 0 \le \beta \le 6 \ ; \ 0 \le \alpha \le 8 \\ 2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6 \ \ldots\ldots(2) \end{cases}$

المعادلة (2) تكافئ $1458 + 81\alpha + 9\alpha + 3 = 1715 + 49\beta + 7\beta + 6$

تكافئ $90\alpha + 1461 = 56\beta + 1721$

تكافئ $90\alpha - 56\beta = 260$

تكافئ $45\alpha - 28\beta = 130$

تكافئ $\begin{cases} \alpha = 28k + 6 \\ \beta = 45k + 5 \end{cases}$ حيث $k \in Z$ حسب السؤال (2)

لكن $\begin{cases} 0 \le \alpha \le 8 \\ 0 \le \beta \le 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 0 \le 28k + 6 \le 8 \\ 0 \le 45k + 5 \le 6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} -6 \le 28k \le 2 \\ -5 \le 45k \le 1 \end{cases}$

أي، $\begin{cases} -6/28 \le 28k \le 2/28 \\ -5/45 \le 45k \le 1/45 \end{cases}$

منه : $k = 0$ (لأن $k \in Z$)

إذن : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 5 \end{cases}$

منه : $N = 1458 + 81(6) + 9(6) + 3$
$= 1458 + 486 + 54 + 3$
$= 2001$

التمرين ـــ 20

1 ـــ أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180

2 ـــ حل في $Z \times Z$ المعادلة $225x - 180y = 90$ .....(1)

3 ـــ عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$

4 ـــ a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ و $\overline{252}$ في النظام ذو الأساس α و يكتبان $\overline{44}$ و $\overline{206}$ في النظام ذو الأساس β

عين α و β ثم إستنتج a و b

الحـل ـــ 20

1 ـــ

225	5
45	5
9	3
3	3
1	

180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

نتيجة : $pgcd(225 ; 180) = 45$

2 ـــ $225x - 180y = 90$ تكافئ $5x - 4y = 2$

تكافئ $5x - 4y = 5(2) - 4(2)$

تكافئ $5x - 5(2) = 4y - 4(2)$

تكافئ $5(x - 2) = 4(y - 2)$

إذن : $x - 2 = 4k$ حيث $k \in Z$

منه : $5 \times 4k = 4(y - 2)$

أي : $y - 2 = 5k$

نتيجة : $\begin{cases} x - 2 = 4k \\ y - 2 = 5k \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

3 ـــ $|x - y + 1| < 2$ تكافئ $-2 < x - y + 1 < 2$

تكافئ $-2 < (4k + 2) - (5k + 2) + 1 < 2$

تكافئ $-2 < 4k + 2 - 5k - 2 + 1 < 2$

تكافئ $-2 < -k + 1 < 2$

تكافئ $-3 < -k < 1$

تكافئ $-1 < k < 3$

تكافئ $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$

من أجل $k = 0$: $\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \end{matrix}\right\}$

من أجل $k = 1$: $\left.\begin{matrix} x = 4 + 2 \\ y = 5 + 2 \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x = 6 \\ y = 7 \end{matrix}\right\}$

من أجل $k = 2$: $\left.\begin{matrix} x = 8 + 2 \\ y = 10 + 2 \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 12 \end{matrix}\right\}$

نتيجة : الثنائيات التي تحقق $|x - y + 1| < 2$ هي $\{(2 ; 2) ; (6 ; 7) ; (10 ; 12)\}$

4 ـ $5 < \alpha$ و $\left.\begin{matrix} a = 5\alpha + 2 \\ b = 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 \end{matrix}\right\}$

$6 < \beta$ و $\left.\begin{matrix} a = 4\beta + 4 \\ b = 2\beta^2 + 6 \end{matrix}\right\}$

إذن : $\left.\begin{matrix} 5\alpha + 2 = 4\beta + 4 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 2\beta^2 + 6 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} 5\alpha - 4\beta = 2 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 = 0 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} \alpha = 4k + 2 \text{ و } \beta = 5k + 2 \text{ حيث } k \in Z \text{ (حسب السؤال (2))} \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 = 0 \text{ .... (2)} \end{matrix}\right\}$

نعوض α و β في المعادلة (2)

$2(4k + 2)^2 + 5(4k + 2) - 2(5k + 2)^2 - 4 = 0$

أي $2(16k^2 + 16k + 4) + 20k + 10 - 2(25k^2 + 20k + 4) - 4 = 0$

أي $32k^2 + 32k + 8 + 20k + 10 - 50k^2 - 40k - 8 - 4 = 0$

أي : $-18k^2 + 12k + 6 = 0$

أي $3k^2 - 2k - 1 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الصحيح k

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$k_1 = \dfrac{2 + 4}{6} = 1$ ؛ $k_2 = \dfrac{2 - 4}{6} = \dfrac{-1}{3}$ مرفوض

نتيجة : $k = 1$ إذن : $\left.\begin{matrix} \alpha = 4 + 2 = 6 \text{ مقبول لأن } 5 < 6 \ (5 < \alpha) \\ \beta = 5 + 2 = 7 \text{ مقبول لأن } 6 < 7 \ (6 < \beta) \end{matrix}\right\}$

إذن : $\left.\begin{matrix} a = \overline{52} \text{ في النظام ذو الأساس 6 منه } a = 5 \times 6 + 2 = 32 \\ b = \overline{252} \text{ في النظام ذو الأساس 6 منه } b = 2 \times 36 + 5 \times 6 + 2 = 104 \end{matrix}\right\}$

التمرين ــ 21

لتكن المعادلة $43x - 13y = \lambda$ ....(*) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث λ عدد صحيح ثابت

1 ــ تحقق أن الثنائية $(-3\lambda ; -10\lambda)$ هي حل للمعادلة (*)

2 ــ حل في $Z \times Z$ المعادلة (*)

3 ــ N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذو الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta0\gamma\gamma\gamma}$ في النظام ذو الأساس 5

أ) بين أن $43\alpha - 13\beta = \gamma$

ب) عين α ، β ، γ ثم أكتب N في النظام العشري

الحـل ــ 21

1 ــ $43(-3\lambda) - 13(-10\lambda) = -129\lambda + 130\lambda = \lambda$

إذن : الثنائية $(-3\lambda ; -10\lambda)$ هي حل للمعادلة (*)

2 ــ $43x - 13y = \lambda$ تكافئ $43x - 13y = 43(-3\lambda) - 13(-10\lambda)$

تكافئ $43x - 43(-3\lambda) = 13y - 13(-10\lambda)$

تكافئ $43(x + 3\lambda) = 13(y + 10\lambda)$

إذن : $x + 3\lambda = 13k$ حيث $k \in Z$

منه $43 \times 13k = 13(y + 10\lambda)$

منه $y + 10\lambda = 43k$

نتيجة : $\begin{cases} x + 3\lambda = 13k \\ y + 10\lambda = 43k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 13k - 3\lambda \\ y = 43k - 10\lambda \end{cases}$ حيث $k \in Z$

3 ـ ليكن $0 \leq \alpha \leq 5$ و $0 \leq \beta \leq 4$ و $0 \leq \gamma \leq 4$

أ) في الأساس 6 : $N = \alpha \times 6^4 + \beta \times 6^3 + \alpha \times 6^2 + \beta \times 6 + \alpha$

$= 1296\alpha + 216\beta + 36\alpha + 6\beta + \alpha$

$= 1333\alpha + 222\beta$

في الأساس 5 : $N = \beta \times 5^4 + \gamma \times 5^2 + \gamma \times 5 + \gamma$

$= 625\beta + 25\gamma + 6\gamma$

$= 625\beta + 31\gamma$

نتيجة : $1333\alpha + 222\beta = 625\beta + 31\gamma$

إذن : $1333\alpha - 403\beta = 31\gamma$ (بالقسمة على 31)

منه : $43\alpha - 13\beta = \gamma$ و هو المطلوب

ب) لدينا $43\alpha - 13\beta = \gamma$ إذن : $(\alpha ; \beta)$ هي حلول المعادلة $43x - 13y = \gamma$

منه حسب السؤال (1) فإن $\begin{cases} \alpha = 13k - 3\gamma \\ \beta = 43k - 10\gamma \end{cases}$ حيث $k \in Z$

بما أن $0 \leq \gamma \leq 4$ و $0 \leq \alpha \leq 5$ و $0 \leq \beta \leq 4$ نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $\gamma = 0$ إذن : $\begin{cases} \alpha = 13k \\ \beta = 43k \end{cases}$

إذن : $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ (لأن القيمة الوحيدة لـ k حيث $0 \leq 13k \leq 5$ هي $k = 0$)

إذن : $N = 0$

الحالة (2) $\gamma = 1$ إذن : $\begin{cases} \alpha = 13k - 3 \\ \beta = 43k - 10 \end{cases}$

منه $\begin{cases} 0 \leq 13k - 3 \leq 5 \\ 0 \leq 43k - 10 \leq 4 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 3 \leq 13k \leq 8 \\ 10 \leq 43k \leq 14 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 3/13 \leq k \leq 8/13 \\ 10/43 \leq k \leq 14/43 \end{cases}$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

الحالة (3) $\gamma = 2$ إذن $\begin{cases} 0 \leq 13k - 6 \leq 5 \\ 0 \leq 43k - 20 \leq 4 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 6/13 \leq k \leq 11/13 \\ 20/43 \leq k \leq 24/43 \end{cases}$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

الحالة (4) $\gamma = 3$ إذن $\begin{cases} 0 \leq 13k - 9 \leq 5 \\ 0 \leq 43k - 30 \leq 4 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 9/13 \leq k \leq 14/13 \\ 30/43 \leq k \leq 34/43 \end{cases}$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

الحالة (5) $\gamma = 4$ إذن $\begin{cases} 0 \leq 13k - 12 \leq 5 \\ 0 \leq 43k - 40 \leq 4 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 12/13 \leq k \leq 17/13 \\ 40/43 \leq k \leq 44/43 \end{cases}$

منه $k = 1$

إذن $\begin{cases} \alpha = 13 - 12 = 1 \\ \beta = 43 - 40 = 3 \end{cases}$

نتيجة : $\alpha = 1$ ؛ $\beta = 3$ ؛ $\gamma = 4$ أو $\alpha = \beta = \gamma = 0$

إذن : $N = 3 \times 625 + 4 \times 25 + 4 \times 5 + 4 = 1999$ أو $N = 0$

التمرين ــ 22

1 ــ عين $pgcd(2505 ; 3006)$

لتكن في $Z \times Z$ المعادلة $2505\,x - 3006\,y = \alpha$ ....(*) حيث $\alpha \in Z$

2 ــ عين شرط على α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $Z \times Z$

3 ــ عين هذه الحلول من أجل $\alpha = 2004$

الحــل ــ 22

1 ــ

2505	3
835	5
167	167
1	

3006	2
1503	3
501	3
167	167
1	

إذن : $pgcd(2505 ; 3006) = 3 \times 167 = 501$

2 ــ إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $2505\,x - 3006\,y = \alpha$

لدينا $\begin{cases} 501 \text{ يقسم } 2505 \\ 501 \text{ يقسم } 3006 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 501 \text{ يقسم } 2505\,x \\ 501 \text{ يقسم } 3006\,y \end{cases}$

منه 501 يقسم $2505\,x - 3006\,y$

أي 501 يقسم α

نتيجة : حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $Z \times Z$ يكفي و يلزم أن يكون α مضاعف للعدد 501

3 ــ $\alpha = 2004$

لدينا $2004 = 4 \times 501$ إذن : المعادلة (1) تقبل حلولا في $Z \times Z$

$2505\,x - 3006\,y = 2004$ تكافئ $5\,x - 6\,y = 4$

تكافئ $5\,x - 6\,y = 5(2) - 6(1)$

تكافئ $5\,x - 5(2) = 6\,y - 6(1)$

تكافئ $5(x - 2) = 6(y - 1)$

إذن : $x - 2 = 6\,k$ حيث $k \in Z$

منه : $5 \times 6\,k = 6(y - 1)$

أي $y - 1 = 5\,k$

نتيجة : $\begin{cases} x - 2 = 6\,k \\ y - 1 = 5\,k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 6\,k + 2 \\ y = 5\,k + 1 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 23

لتكن المعادلة $78\,x^3 + u\,x^2 + v\,x - 14 = 0$ .... (1) ذات المجهول x في مجموعة الأعداد الناطقة .

(u و v عددين صحيحين)

الجزء I

نفرض أن $x = \dfrac{14}{39}$ هو حل للمعادلة (1)

1 ــ بين أن العددين u و v يحققان العلاقة $14\,u + 39\,v = 1129$

2 ــ باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد الثنائية $(x ; y)$ من $Z \times Z$ و التي تحقق المعادلة $14\,u + 39\,v = 1$

3 ــ تحقق أن الثنائية $(-25 ; 9)$ هي حل للمعادلة $14\,u + 39\,v = 1$

4 ــ إستنتج ثنائية $(x_0 ; y_0)$ حلا خاصا للمعادلة $14\,u + 39\,v = 1129$ ثم أعط الحل العام لهذه المعادلة

5 ــ من بين حلول المعادلة $14\,u + 39\,v = 1129$ عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

الجزء II

1 ــ حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين 78 و 14 ثم إستنتج مجموعة قواسم كل منهما .

2 ــ ليكن $x = \dfrac{P}{Q}$ حل ناطق للمعادلة (1)

برهن أن إذا كان P و Q أوليان فيما بينهما فإن P يقسم 14 و Q يقسم 78

3 ـ إستنتج عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي يمكن أن تكون حلولا للمعادلة (1) ثم أكتب من بين هذه الحلول الموجبة منها .

الحـل ـ 23

1 ـ $x = \frac{14}{39}$ حل للمعادلة (1) إذن : $78\left(\frac{14}{39}\right)^3 + u\left(\frac{14}{39}\right)^2 + v\left(\frac{14}{39}\right) - 14 = 0$

منه : $78(14^3) + 14^2 \times 39\,u + 14 \times 39^2\,v - 14 \times 39^3 = 0$

أي : $78 \times 14^2 + 14 \times 39\,u + 39^2\,v - 39^3 = 0$

أي : $2 \times 14^2 + 14\,u + 39\,v - 39^2 = 0$

أي : $14\,u + 39\,v = 39^2 - 2 \times 14^2$

منه : $14\,u + 39\,v = 1129$

2 ـ

$$\begin{array}{r|l} 39 & 14 \\ 28 & 2 \\ 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 11 \\ 11 & 1 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ 9 & 3 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$11 = 39 - 14(2)$

$3 = 14 - 11(1)$

$2 = 11 - 3(3)$

$1 = 3 - 2(1)$ إذن : $1 = 14 - 11(1) - 11 + 3(3)$

أي $1 = 14 - 11(2) + 3(3)$

منه $1 = 14 - 2[39 - 14(2)] + 3[14 - 11(1)]$

أي $1 = 14 - 39(2) + 14(4) + 14(3) - 11(3)$

أي $1 = 14(8) - 39(2) - 3[39 - 14(2)]$

منه $1 = 14(8) - 39(2) - 39(3) + 14(6)$

أي $1 = 14(14) + 39(-5)$

منه : الثنائية المطلوبة هي $(x\,;\,y) = (14\,;\,-5)$

3 ـ $14(-25) + 39(9) = -350 + 351 = 1$

إذن : فعلا الثنائية $(-25\,;\,9)$ حل للمعادلة $14\,u + 39\,v = 1$

نتيجة : $14(-25) + 39(9) = 1$ إذن : $14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129) = 1129$

إذن : $14\,u + 39\,v = 14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129)$

أي $14(u + 25 \times 1129) = 39(9 \times 1129 - v)$

منه : 39 يقسم $(u + 25 \times 1129)$ لأن 39 أولي مع 14

إذن : $u + 25 \times 1129 = 39\,k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

منه : $14 \times 39\,k = 39(9 \times 1129 - v)$

أي $9 \times 1129 - v = 14\,k$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} u + 25 \times 1129 = 39\,k \\ 9 \times 1129 - v = 14\,k \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u = 39\,k - 25 \times 1129 \\ v = 9 \times 1129 - 14\,k \end{array}\right.$

5 ـ u عدد طبيعي إذا و فقط إذا كان $u \geq 0$ لأن $u \in \mathbb{Z}$

إذن : $39\,k - 25 \times 1129 \geq 0$

أي $k \geq \frac{25 \times 1129}{39}$

أي $k \geq 723{,}71$

منه : $k \geq 724$ لأن k عدد صحيح .

إذن : يكون u أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $k = 724$

في هذه الحالة : منه $\begin{cases} u = 39(724) - 25 \times 1129 = 11 \\ v = 9 \times 1129 - 14(724) = 25 \end{cases}$: $(u ; v) = (11 ; 25)$

الجزء II

1 –

78	2
39	3
13	13
1	

14	2
7	7
1	

قواسم 78 هي $\{78 ; 6 ; 26 ; 2 ; 39 ; 3 ; 13 ; 1\}$

قواسم 17 هي $\{14 ; 7 ; 2 ; 1\}$

2 – $\frac{P}{Q}$ حل للمعادلة (1) إذن : $78\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + u\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + v\left(\frac{P}{Q}\right) - 14 = 0$

منه $78 \times P^3 + u \times P^2 \times Q + v \times P \times Q^2 - 14\, Q^3 = 0$

منه : $u \times P^2 \times Q + v \times P \times Q^2 = 14\, Q^3 - 78\, P^3$

منه $P\, Q(u\, P + v\, Q) = 14\, Q^3 - 78\, p^3$

إذن $u\, P + v\, Q = \frac{14\, Q^3 - 78\, P^3}{P\, Q}$

أي $u\, P + v\, Q = \frac{14}{P} Q^2 - \frac{78}{Q} P^2$

بما أن $u\, P + v\, Q$ عدد صحيح فإن $\frac{14}{P} Q^2 - \frac{78}{Q} P^2$ عدد صحيح .

أي Q يقسم 78 و P يقسم 14 و هو المطلوب . (لأن P و Q أوليان فيما بينهما)

3 – Q يقسم 78 و عدد قواسم 78 الموجبة هو 8

P يقسم 14 و عدد قواسم 14 الموجبة هو 4

إذن : يمكن إختيار العدد $\frac{P}{Q}$ بـ 20 طريقة مختلفة حيث P و Q أوليان فيما بينهما . و باعتبار الأعداد الناطقة السالبة يكفي ضرب هذه الأعداد في (1 -)

إذن : عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي يمكن أن تكون حلا للمعادلة (1) هو 40

و الموجبة منها هي : $\left\{\frac{1}{13} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{39} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{26} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{78} ; \frac{2}{13} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{39} ; \frac{7}{13} ; \frac{7}{3} ; \frac{7}{39} ; \frac{7}{2} ; \frac{7}{26} ; \frac{14}{39} ; \frac{14}{3} ; \frac{14}{13} ; \frac{7}{78} ; \frac{7}{6}\right\}$

التمرين – 24

1 – أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن العددان $14\, n + 3$ و $5\, n + 1$ أوليان فيما بينهما .

2 – إستنتج أن 87 و 31 أوليان فيما بينهما .

3 – عين حلا $(u ; v)$ للمعادلة $87\, u + 31\, v = 1$ ثم إستنتج حلا $(x ; y)$ للمعادلة $87\, x + 31\, y = 2$

الحـل – 24

1 – من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$5(14\, n + 3) - 14(5\, n + 1) = 70\, n + 15 - 70\, n - 14 = 1$

إذن : حسب بيزو فإن العددان $14\, n + 3$ و $5\, n + 1$ أوليان فيما بينهما

2 – من أجل $n = 6$ لدينا $\begin{cases} 14\, n + 3 = 84 + 3 = 87 \\ 5\, n + 1 = 30 + 1 = 31 \end{cases}$

إذن : 87 و 31 أوليان فيما بينهما .

3 – لدينا : $87(5) + 31(-14) = 435 - 434 = 1$

إذن : الثنائية $(5 ; -14)$ هي حل للمعادلة $87\, u + 31\, v = 1$

4 – $87(5) + 31(-14) = 1$ إذن : $87(10) + 31(-28) = 2$

منه : الثنائية $(10 ; -28)$ هي حل للمعادلة $87\, x + 31\, y = 2$

ملاحظة : يمكن البحث عن حل خاص للمعادلة $87\, u + 31\, v = 1$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{c|c} 87 & 31 \\ \hline 62 & 2 \\ 25 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 31 & 25 \\ \hline 25 & 1 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 25 & 6 \\ \hline \boxed{1} & 4 \end{array}$$

(1) .... $25 = 87 - 31(2)$

(2) .... $6 = 31 - 25(1)$

(3) .... $1 = 25 - 6(4)$

نعوض (1) و (2) في (3) فنحصل على :

$$1 = 87 - 31(2) - 4[31 - 25(1)]$$

أي : $1 = 87 - 31(6) + 25(4)$ .... (4)

نعوض (1) في (4) $\quad 1 = 87 - 31(6) + 4[87 - 31(2)]$

أي : $\quad 1 = 87(5) + 31(-14)$

نتيجة : الثنائية $(5\,;\,-14)$ حل خاص للمعادلة $87\,u + 31\,v = 1$

الفهرس

الصفحـــة	المحـــور
1	المحـــور 1 : **الأعداد المركبة**
11	حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي
55	حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا
83	المحـــور 2 : **التشابه المباشر**
86	حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي
106	حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا
131	المحـــور 3 : **المقاطع المستوية للسطوح**
137	حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي
162	المحـــور 4 : **الأعداد الأولية**
166	حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي
192	حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا



TEL : 0773 26 52 81



مطابق للبرنامج الجديد

KIMOU.

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

الجزء

5

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

3^e Année Secondaire : Mathématiques

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

بسم الله الرحمن الرحيم

سلسلة هبـــاج

KIMOU.

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـــاذج للبكالوريا

الجزء الخامس



السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ـ رياضيات ـ علوم تجريبية



يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكــل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ـ محتــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ـ يشمل هذا الجزء من السلسلة على أربع محاور من البرنامج :

- **الأعداد المركبة**
- **التشابه المباشر**
- **المقاطع المستوية للسطوح**
- **الأعداد الأولية**

ـ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايــة كل درس ، مجموعة تطبيقــات للتصحيح الذاتــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 81 52 26 0773

الأعداد المركبة

تعريف : نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب من الشكل $z = x + i\,y$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

مثلا : $5 - 2i$ ؛ $-i$

ملاحظة : نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـــ C

إذا كان $z = x + i\,y$ عددا مركبا فإن x يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له بـــ $Re(z)$ و y يسمى الجزء التخيلي و نرمز له $Im(z)$.

إذا كان $Im(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي

إذا كان $Re(z) = 0$ نقول أن z عدد تخيلي صرف أو تخيلي محض أو تخيلي بحت

يكون z عددا مركبا معدوما إذا و فقط إذا كان $Re(z) = Im(z) = 0$

الكتابة $z = x + i\,y$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z

يكون z و z' عددان مركبان متساويان إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

التمثيل الهندسي

ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$

كل عدد مركب من الشكل $z = x + i\,y$ حيث $(x \in R \;؛\; y \in R \;؛\; i^2 = -1)$ له صورة في المستوي هي النقطة M ذات الإحداثيات $(x ; y)$

الشعاع $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هو أيضا صورة للعدد المركب z و العكس صحيح حيث :

كل نقطة $M(x ; y)$ من المستوي هي لاحقة لعدد مركب $z = x + i\,y$

كل شعاع $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ من المستوي هو لاحقة لعدد مركب $z = x + i\,y$

نتائج :

إذا كان z عدد حقيقي فإن صورته هي نقطة من محور الفواصل .

إذا كان z عدد تخيلي صرف فإن صورته هي نقطة من محور التراتيب

المستوي في هذه الحالة يسمى المستوي المركب

نشاط :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

x و y عددان حقيقيان . لتكن (S) مجموعة النقط $M(x ; y)$ من المستوي حيث $z = x^2 + (1 + i)\,y - i$ $(i^2 = -1)$

عين المجموعة (S) في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ z عدد حقيقي   2 ــ z تخيلي صرف

الحـل :

لنكتب z على شكله الجبري :

$$z = x^2 + (1 + i)\,y - i = x^2 + y + i\,y - i = (x^2 + y) + (y - 1)\,i$$

1 ــ يكون z حقيقي إذا و فقط إذا كان $y - 1 = 0$ أي $y = 1$

إذن : في هذه الحالة (S) هو المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (موازي لمحور الفواصل)

2 ــ يكون z تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $x^2 + y = 0$ أي $y = -x^2$

إذن : في هذه الحالة (S) هو منحنى الدالة f المعرفة على R بـــ $f(x) = -x^2$

مرافق عدد مركب :

تعريف : z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

نسمي مرافق z العدد المركب $\overline{z}$ و المعرف بـــ $\overline{z} = x - i\,y$

أمثلة : $\overline{1 + 3i} = 1 - 3i$ ؛ $\overline{-i} = i$ ؛ $\overline{-3} = \overline{-3 + 0\,i} = -3$

تفسير هندسي :

في المستوي المركب إذا كانت M صورة العدد المركب z فإن M' صورة العدد المركب $\overline{z}$ هي نظيرة النقطة M

بالنسبة إلى محور الفواصل .

عمليات على الأعداد المركبة :

z و z' عددان مركبان يكتبان على شكلهما الجبري على الترتيب $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

(*) $z + z' = (x + i\,y) + (x' + i\,y') = (x + x') + i(y + y')$

(**) $z \times z' = (x + i\,y)(x' + i\,y') = x\,x' + i\,x\,y' + i\,x'\,y + i^2\,y\,y'$
$= x\,x' - y\,y' + i(x\,y' + x'\,y)$

ملاحظة : $z \times \overline{z} = (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 - (i\,y)^2 = x^2 + y^2$

إذن : الجداء $z \times \overline{z}$ هو عدد حقيقي .

نتيجة هامة : لكتابة العدد $1/z$ (حيث $z \neq 0$) على شكله الجبري يكفي أن نحول مقامه إلى عدد حقيقي .

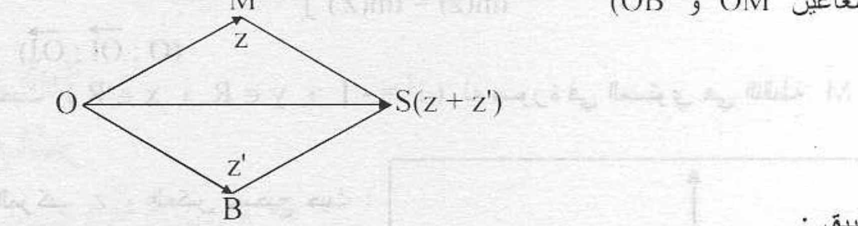
مثلا : $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$

التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين

في المستوي المركب نعتبر النقطة M صورة العدد المركب z و النقطة B صورة العدد المركب z'

العدد $z + z'$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}$ حيث O هو مبدأ المعلم

إذن : النقطة S حيث الرباعي $OMSB$ متوازي أضلاع هي صورة العدد المركب $z + z'$ (الشعاع $\overrightarrow{OS}$ هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OB}$)



تطبيق :

1 ـ أكتب كل من الأعداد i^3 ؛ i^4 ؛ i^5 ؛ i^6 ؛ i^7 ؛ i^8 على شكلها الجبري

2 ـ ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n كتابة العدد i^n على شكله الجبري

الحـــل :

1 ـ $i^3 = i^2 \times i = -i$ ، $i^5 = i \times i^4 = i$ ، $i^7 = i \times i^6 = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ ، $i^6 = i \times i^5 = (i)^2 = -1$ ، $i^8 = (i^4)^2 = 1$

2 ـ إذا كان $n = 4k$ فإن : $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن : $i^n = i^{4k+1} = i \times i^{4k} = i$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن : $i^n = i^{4k+2} = i^2 \times i^{4k} = (-1) \times 1 = -1$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن : $i^n = i^{4k+3} = i^3 \times i^{4k} = i^3 = -i$

لاحقة شعاع كيفي (مرجح جملة)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب z_A و z_B

العدد المركب $z_B - z_A$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$

نتيجة : إذا كان a و b عددان حقيقيان حيث $a + b \neq 0$ فإن مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\}$ له اللاحقة

$$\frac{a\,z_A + b\,z_B}{a + b}$$

ملاحظة : يمكن لهذه النتيجة أن تعمم إلى n نقطة مختلفة

خواص مرافق عدد مركب :

ليكن z و z' عددين مركبين . لدينا الخواص التالية :

1 ـ $\overline{\overline{z}} = z$

2 ـ $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

3 ـ $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$

4 ـ $z \times \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

5 ـ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

6 – $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

7 – $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ حيث $n \in N^*$

8 – $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ حيث $z' \neq 0$

9 – $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ مع $z \neq 0$

نشاط :

ليكن p كثير حدود للمتغير المركب z معرف كمايلي $p(z) = z^3 + z^2 - 2$

1 – أثبت أن : $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

2 – أحسب $p(1)$ ؛ $p(-1-i)$ ماذا تستنتج ؟

3 – إستنتج الجذر الآخر لكثير الحدود p

الحـــل :

1 – $\overline{p(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 2 = (\overline{z})^3 + (\overline{z})^2 - 2 = p(\overline{z})$

2 – $p(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$

$$\begin{aligned} p(-1-i) &= (-1-i)^3 + (-1-i)^2 - 2 \\ &= (-1-i)^2[-1-i+1] - 2 \\ &= (1+2i-1)(-i) - 2 \\ &= 2i(-i) - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

نتيجة : الأعداد 1 و $(-1-i)$ هي جذور لكثير الحدود p

3 – حسب السؤال (1) فإن : $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$

إذن : $p(\overline{-1-i}) = \overline{p(-1-i)}$

أي : $p(-1+i) = \overline{0}$

منه : $p(-1+i) = 0$

إذن : الجذر الاخر لـــ p هو $-1+i$

طويلة عدد مركب

تعريف : z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + iy$

نسمي طويلة z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـــ $|z|$ و المعرف بـــ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

أمثلة : $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

$|1 - i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$|3i| = \sqrt{0 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3$

حالات خاصة : إذا كان $z = 0$ فإن $|z| = 0$

اذا كان z عدد حقيقي فإن طويلة z هي القيمة المطلقة لـــ z

إذا كان z عدد تخيلي صرف فإن طويلة z هي القيمة المطلقة لجزؤه التخيلي

خواص : z و z' عددين مركبين . لدينا الخواص التالية :

1 – $|\overline{z}| = |z|$

2 – $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

3 – $|-z| = |z|$

4 – $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$

5 – $|z^n| = |z|^n$ مع $n \in N^*$

حذر ! $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

عمدة عدد مركب غير معدوم

تعريف : z عدد مركب غير معدوم يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$ نعتبر النقطة $M(x ; y)$ ذات اللاحقة z .

كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد المركب z و نرمز له بـ $Arg(z)$

نتيجة : إذا كان θ هو عمدة للعدد المركب z فإن كل عدد حقيقي من الشكل $\theta + 2\pi k$ حيث $k \in Z$ هو أيضا عمدة للعدد المركب z

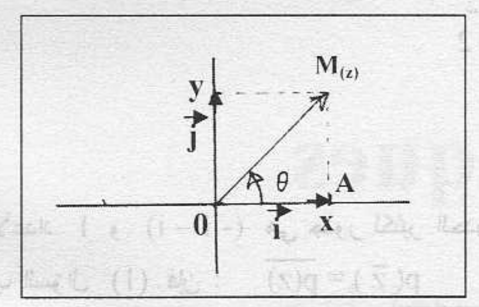
مثلا : لنمثل العدد $z = 1 + i$

لاحظ أن $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4}$

إذن : $Arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$

البحث عن عمدة عدد مركب

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$ نعتبر العدد المركب $z = x + i\,y$ لاحقة للنقطة M
في المثلث القائم OAM لدينا :



$$\begin{cases} OM^2 = OA^2 + MA^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{OM} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{OM} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} OM^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{OM} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{OM} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

لكن $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

إذن :
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

نتيجة : عمدة العدد المركب z حيث $z = x + i\,y$ هي العدد الحقيقي θ الذي يحقق :
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

أمثلة : عين عمدة العدد المركب $z = 1 - \sqrt{3}\,i$

الحــل : ليكن $Arg(z) = \theta$

إذن :
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{|z|} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+3}} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

منه : $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ حيث $k \in Z$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

z و z' عددان مركبان غير معدومان .

1 – $\mathrm{Arg}(z \times z') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$

2 – $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')$

3 – $\mathrm{Arg}(z^n) = n \times \mathrm{Arg}(z)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

نتيجة : الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

إذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث طويلته $|z| = \ell$ و عمدته $\mathrm{Arg}(z) = \theta$

فإن كتابة z من الشكل $z = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z

مثال : $z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

إذن : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = \frac{-\pi}{4}$

إذن : الشكل المثلثي لـ z هو $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

تطبيق :

أكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي (باستعمال خواص الطويلة و العمدة)

1 – $z = 1 + i$

2 – $z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

3 – $z = (1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})$

4 – $z = \frac{1+i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}$

الحـل :

1 – $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

إذن : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = \frac{\pi}{4}$

نتيجة : $1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

2 – $|\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ منه $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = -\frac{\pi}{3}$

نتيجة : $\sqrt{2} - i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

3 – $|(1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})| = |1+i| \times |\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

$\mathrm{Arg}((1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})) = \mathrm{Arg}(1+i) + \mathrm{Arg}(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}$

نتيجة : $(1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

4 – $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}\right| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{2} - i\sqrt{6}|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{Arg}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}\right) = \mathrm{Arg}(1+i) - \mathrm{Arg}(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$

نتيجة : $\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم

تعريف : العدد المركب الذي طويلته 1 و عمدته θ حيث $\theta \in R$ يكتب على الشكل الأسي كمايلي $e^{i\theta}$ حيث $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ هذا الترميز يسمى ترميز أولر

تعميم : إذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث $|z| = \ell$ و $Arg(z) = \theta$ فإن z يكتب على الشكل الأسي من الشكل $z = \ell\, e^{i\theta}$

ملاحظة : الشكل الأسي لعدد مركب يحتفظ بخواص الدالة الأسية كمايلي :

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\theta)}$$

دستور موافر

ليكن z عدد مركب حيث $|z| = \ell$ و $Arg(z) = \theta$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$z^n = (\ell\, e^{i\theta})^n = \ell^n \times e^{in\theta} = \ell^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$$

إذن : $[\ell(\cos\theta + i\sin\theta]^n = \ell^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$

نشاط :

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$5\,e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad 8\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

الحـل :

$$2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 + i\sqrt{3}$$

$$8\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 8\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$$

$$5\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 5\left[0 + i\right] = 5i$$

نشاط عكسي :

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسي :

$$(1-i)^8 \quad ; \quad -3-3i \quad ; \quad -7i$$

الحـل :

$|-7i| = 7$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{7} = 0 \\ \sin\theta = \frac{-7}{7} = -1 \end{cases}$$

إذن : $\theta = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = -\frac{\pi}{2}$

نتيجة : $-7i = 7\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 7\,e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$|-3-3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

إذن : $\theta = 5\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = \frac{5\pi}{4}$

نتيجة : $-3-3i = 3\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = 3\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$

$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$ إذن : $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = -\frac{\pi}{4}$

نتيجة : $1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$

منه $(1-i)^8 = \left[\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}\right]^8 = 16\, e^{-2\pi i}$

البحث عن الجذران التربيعيان لعدد مركب على شكلهما الجبري :

ليكن z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i y$

نريد تعيين العدد المركب w على شكله الجبري $w = \alpha + i\beta$ حيث $w^2 = z$ لذلك نتبع الخطوات التالية :

1 ــ $w^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2 i \alpha\beta$

2 ــ $|w^2| = |w|^2 = \alpha^2 + \beta^2$

3 ــ إذا كان $w^2 = z$ فإن $\begin{cases}|w^2| = |z|\\ Re(w^2) = Re(z)\\ Im(w^2) = Im(z)\end{cases}$

أي $\begin{cases}(1)........\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2}\\ (2)\ ....\ \alpha^2 - \beta^2 = x\\ (3)\ ....\ 2\alpha\beta = y\end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2\alpha^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$

منه : $\alpha^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

إذن : يكفي أن يكون $\alpha = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$

نعوض α في المساواة (3) : $2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}\,\beta = y$

إذن : $\beta = \frac{y}{2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}}$ أي $\beta = \frac{y}{2\alpha}$ مع $\alpha \neq 0$

نتيجة : أحد الجذور التربيعية للعدد المركب $z = x + i y$ هو العدد $w = \sqrt{\frac{x + |z|}{2}} + i\frac{y}{2\sqrt{\frac{x + |z|}{2}}}$

حيث $x + \sqrt{|z|} \neq 0$

ملاحظة : للحصول على الجذر الاخر يكفي أن نأخذ $(-w)$

مثال : عين الجذر التربيعي للعدد $-8 + 6i$

الحـل : ليكن $(\alpha + i\beta)^2 = -8 + 6i$

إذن : $\alpha = \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 + 36}}{2}} = \sqrt{\frac{-8 + 10}{2}} = 1$

منه : $\beta = \frac{6}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3$

نتيجة : $\alpha + i\beta = 1 + 3i$ أي $(1 + 3i)^2 = -8 + 6i$

و الجذر الأخر : $-(1 + 3i) = -1 - 3i$

البحث عن حلول معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول مركب z

لتكن المعادلة $a z^2 + b z + c = 0$ ....(1) ذات المجهول المركب z حيث a ، b ، c أعداد مركبة معلومة حيث $a \neq 0$

المعادلة (1) دائما تقبل حلولا في مجموعة الأعداد المركبة C كمايلي :

1 ــ نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

2 ــ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا $z_0 = \frac{-b}{2a}$

3 ــ إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين z_1 و z_2 حيث $z_1 = \frac{-b-w}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b+w}{2a}$

و w هو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب Δ

مثال : حل في C المعادلة : $z^2 + (3-2i)z + 5 - 5i = 0$ .... (1)

الحـل :

$$\Delta = (3-2i)^2 - 4(1)(5-5i)$$
$$= 9 - 12i - 4 - 20 + 20i$$
$$= -15 + 8i$$
$$= (\alpha + i\beta)^2$$

لنبحث عن α و β كمايلي :

$$|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

منه : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{-15+17}{2}} \\ \beta = \frac{8}{2\alpha} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 8/2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{cases}$

نتيجة : أحد الجذور التربيعية للعدد المركب Δ هو : $1 + 4i$

منه : حلول المعادلة (1) هي : $\begin{cases} z_1 = \frac{-(3-2i)-(1+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i \\ z_2 = \frac{-(3-2i)+(1+4i)}{2} = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i \end{cases}$

البحث عن الشكل المركب لتحويل نقطي مألوف

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

$N(x ; y)$ و $N'(x' ; y')$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z'

1 ــ الانسحاب : ليكن $\vec{u}\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي .

T هو الانسحاب للمستوي ذو الشعاع $\vec{u}$ يحول النقطة N إلى N'

إذن : $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$

منه : $z' - z = \alpha + i\beta$

أي : $z' = z + \alpha + i\beta$ و هي العبارة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$

خواص : الإنسحاب هو تحويل تقابلي للمستوي و تحويله العكسي هو الإنسحاب ذو الشعاع $-\vec{u}$ الذي لاحقته $-\alpha - i\beta$ إذن عبارته $z' = z - \alpha - i\beta$

2ــ التحاكي : لتكن $W(\alpha ; \beta)$ نقطة ثابتة من المستوي و k عدد حقيقي غير معدوم

h هو التحاكي للمستوي مركزه W و نسبته k و يحول N إلى N'

إذن : $\overrightarrow{WN'} = k\,\overrightarrow{WN}$

منه : $z' - (\alpha + i\beta) = k[z - (\alpha + i\beta)]$

منه : $z' = kz + (\alpha + i\beta)(1 - k)$ هي عبارة التحاكي h

3ــ الدوران : لتكن $w(\alpha ; \beta)$ نقطة ثابتة من المستوي و θ عدد حقيقي

R هو الدوران للمستوي مركزه W و زاويته θ و يحول النقطة N إلى N'

إذن : $\begin{cases} (\overrightarrow{WN} ; \overrightarrow{WN'}) = \theta \\ \|\overrightarrow{WN'}\| = \|\overrightarrow{WN}\| \end{cases}$

منه : $\begin{cases} \text{Arg}(z' - (\alpha + i\beta)) - \text{Arg}(z - (\alpha + i\beta)) = \theta \\ z' - (\alpha + i\beta)| = |z - (\alpha + i\beta)| \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{Z' - (\alpha + i\beta)}{Z - (\alpha + i\beta)}\right) = \theta \\ \left|\frac{Z' - (\alpha + i\beta)}{Z - (\alpha + i\beta)}\right| = 1 \end{cases}$

إذن : $\dfrac{Z' - (\alpha + i\,\beta)}{Z - (\alpha + i\,\beta)} = \cos\theta + i\sin\theta$

أي : $z' - (\alpha + i\,\beta) = (\cos\theta + i\sin\theta)[z - (\alpha + i\,\beta)]$

إذن : $z' = (\cos\theta + i\sin\theta)\,z + (\alpha + i\,\beta)[1 - (\cos\theta + i\sin\theta)]$ هي عبارة الدوران R

دراسة الحالة العامة :

ليكن f التحويل النقطي للمستوي و الذي يحول النقطة N ذات اللاحقة z إلى النقطة 'N ذات اللاحقة 'z حيث $z' = a\,z + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$. نميز الحالات التالية :

1 ــ إذا كان $a = 1$ فإن f هو الإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة b

2 ــ إذا كان $a \in R^* - \{1\}$ فإن f هو التحاكي الذي مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ و النسبة a

3 ــ إذا كان $a \in C - R$ حيث $|a| = 1$ فإن f هو الدوران الذي مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ و الزاوية θ حيث $\theta = Arg(a)$

مثال (1) : المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$

t هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

1 ــ عين العبارة المركبة للإسحاب t

2 ــ A نقطة لاحقتها $3 - i$. عين لاحقة النقطة 'A صورة A بالإنسحاب t

الحــل :

1 ــ لتكن M نقطة لاحقتها z و 'M نقطة لاحقتها 'z

'M صورة M بـ t إذا و فقط إذا كان $z' = z + (-2 + i)$ و هي عبارة الإنسحاب t

2 ــ من أجل $z = 3 - i$ فإن : $z' = 3 - i - 2 + i = 1$

إذن : لاحقة النقطة 'A هي 1 أي $A'(1\,;0)$

مثال (2) : h تحاكي للمستوي مركزه A ذات اللاحقة $-1 + 2i$ و نسبته 3

عين العبارة المركبة لــ h ثم لاحقة صورة النقطة B حيث B هي النقطة التي لاحقتها $-3 - 2i$

الحــل : لتكن $z' = a\,z + b$ عبارة التحاكي .

النسبة هي 3 إذن : $a = 3$

لاحقة المركز هي $-1 + 2i$ إذن : $\dfrac{b}{1-3} = -1 + 2i$ أي $b = (1 - 3)(-1 + 2i)$

منه : $b = 2 - 4i$

إذن : عبارة التحاكي h هي : $z' = 3z + 2 - 4i$

من أجل $z = -3 - 2i$ فإن $z' = 3(-3 - 2i) + 2 - 4i$

أي : $z' = -7 - 10i$ و هي لاحقة صورة B

مثال (3) : عين العبارة المركبة للدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

الحــل : لتكن $z' = a\,z + b$ عبارة الدوران

زاوية الدوران هي $\dfrac{\pi}{3}$ إذن : $a = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

منه : $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

لاحقة مركز الدوران هي $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ إذن : $\dfrac{b}{1-a} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

أي : $\dfrac{b}{1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

منه : $b = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

أي : $b = -\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\right)$

أي $b = -1$

نتيجة : عبارة الدوران هي : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z - 1$

حل معادلات من الدرجة الرابعة (مضاعفة التربيع)

لحل المعادلة $a z^4 + b z^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ في C نضع $z^2 = t$ ثم نحل المعادلة $a t^2 + b t + c = 0$ ذات المجهول المركب t و لتكن t_1 و t_2 هذه الحلول (يمكن أن يكون $t_1 = t_2$)

إذن : حلول المعادلة $a z^4 + b z^2 + c = 0$ هي الجذور التربيعية للعددين t_1 و t_2

حل معادلات من الدرجة الثالثة :

لحل المعادلة $a z^3 + b z^2 + c z + d = 0$ $(a \neq 0)$ في C نبحث عن أحد حلولها الخاصة (حل حقيقي ، حل تخيلي صرف أو حلان مترافقان) ثم بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على الحلول الأخرى .

الجذور النونية لعدد مركب على شكله المثلثي

ليكن z عدد مركب على شكله المثلثي $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $R > 0$

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1

كل عدد مركب w يحقق $w^n = z$ هو جذر نوني للعدد z

للبحث عن w على شكله المثلثي نضع $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

إذن : $w^n = z$ يكافئ $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

يكافئ $\begin{cases} r^n = R \\ n\alpha = \theta + 2\pi k \quad \text{حيث} \quad k \in Z \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \alpha = \frac{1}{n}\theta + \frac{2\pi}{n} k \end{cases}$

ملاحظة : كل عدد مركب له n جذر نوني مختلف $(n > 1)$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل تمارين هذا المحور نعتبر المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

التمرين – 1

عين $Re(z)$ و $Im(z)$ ثم $|z|$ في كل حالة من الحالات التالية :

1 – $z = 3 + 2i$ 4 – $z = i - 3\sqrt{2}$

2 – $z = -1 + 3i$ 5 – $z = \sqrt{5} - \sqrt{7}$

3 – $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6 – $z = -i\sqrt{3}$

الحــل – 1

z	Re(z)	Im(z)	$\lvert z' \rvert$
$3 + 2i$	3	2	$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$-1 + 3i$	-1	3	$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\left\lvert \frac{-\sqrt{3}}{3} \right\rvert = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (حقيقي)
$i - 3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	1	$\sqrt{9 \times 2 + 1} = \sqrt{19}$
$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	0	$\lvert \sqrt{5} - \sqrt{7} \rvert = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ (حقيقي)
$-i\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$\lvert -\sqrt{3} \rvert = \sqrt{3}$ (تخيلي)

التمرين – 2

z عدد مركب حيث $z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما .

الحــل – 2

z معدوم إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} Re(z) = 0 \\ Im(z) = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x \in \{0 ; -1\} \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$

من أجل $x = 0$: $y - 1 = 0$ إذن : $y = 1$

من أجل $x = -1$: $1 + y - 1 = 0$ إذن : $y = 0$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(0 ; 1) ; (-1 ; 0)\}$

التمرين – 3

1 – عين إحداثيات النقطة D ذات اللاحقة $\sqrt{3} + 3i$

2 – عين لواحق النقط A ؛ B ؛ C حيث $A(\sqrt{3} ; 1)$ ؛ $B(0 ; 2)$ ؛ $C(-\sqrt{3} ; -1)$

الحــل – 3

1 – إحداثيات النقطة D هما $(\sqrt{3} ; 3)$

2 ــ لاحقة النقطة A هي العدد المركب $\sqrt{3} + i$
لاحقة النقطة B هي العدد المركب $2i$
لاحقة النقطة C هي العدد المركب $-\sqrt{3} - i$

التمرين ــ 4

إليك الشكل المقابل .

ليكن z عدد مركب نضع $z' = 3 + iz$

أكتب العدد 'z على شكله الجبري في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ z هو لاحقة النقطة A

2 ــ z هو لاحقة النقطة B

3 ــ z هو لاحقة النقطة C

A, B, C, J, 0, i, -2, 3

الحـل ــ 4

1 ــ z هو لاحقة النقطة A إذن : $z = 3 + 2i$

منه : $z' = 3 + i(3 + 2i)$

أي : $z' = 3 + 3i - 2$

أي $z' = 1 + 3i$

2 ــ z هو لاحقة النقطة B إذن : $z = -2 + i$

منه : $z' = 3 + i(-2 + i)$

أي $z' = 3 - 2i - 1$

أي $z' = 2 - 2i$

3 ــ z هو لاحقة النقطة C إذن : $z = -2i$

منه $z' = 3 + i(-2i)$

أي $z' = 3 + 2$

أي $z' = 5$

التمرين ــ 5

A نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $a = -1 + 2i$

عين العدد المركب z حيث تكون صورته النقطة M نظيرة A بالنسبة إلى :

أ) مبدأ المعلم　　　　ح) حامل محور التراتيب

ب) حامل محور الفواصل　　　　د) المنصف الأول .

الحـل ــ 5

$a = -1 + 2i$ لاحقة النقطة A إذن : $A(-1 ; 2)$

أ) M نظيرة A بالنسبة إلى مبدأ المعلم إذن $M(1 ; -2)$ منه $z = 1 - 2i$

ب) M نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن $M(-1 ; -2)$ منه $z = -1 - 2i$

ج) M نظيرة A بالنسبة إلى محور التراتيب إذن $M(1 ; 2)$ منه $z = 1 + 2i$

د) M نظيرة A بالنسبة إلى المنصف الأول إذن $M(2 ; -1)$ منه $z = 2 - i$

التمرين ــ 6

أعط مرافق كل من الأعداد المركبة التالية :

$2 + 4i$ ؛ $3 - i$ ؛ $i\sqrt{2} - 3$ ؛ $-\frac{5}{2}i$

الحـل ــ 6

$\overline{2 + 4i} = 2 - 4i$　　　$\overline{i\sqrt{2} - 3} = -i\sqrt{3} - 3$

$\overline{3 - i} = 3 + i$　　　$\overline{-\frac{5}{2}i} = \frac{5}{2}i$

التمرين ــ 7

z عدد مركب حيث $z = 3 + 4i$. أحسب $z \times \overline{z}$ ثم أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{i}{z}$

الحـل ــ 7

$$z \times \overline{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{i\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{i(3 - 4i)}{25} = \frac{3i + 4}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

التمرين – 8

z عدد مركب حيث $z = 2 + i$

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{\overline{z}} \quad ; \quad \frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{\overline{z}} \quad ; \quad \frac{1}{z} + \frac{i}{\overline{z}}$$

الحل – 8

لدينا :

$$z\overline{z} = (2+i)(2-i) = 4+1 = 5$$

$$\frac{1}{z} + \frac{i}{\overline{z}} = \frac{\overline{z} + iz}{z\overline{z}} = \frac{2-i+i(2+i)}{5} = \frac{2-i+2i-1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$\frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}(1+2i) - z(3-i)}{z\overline{z}}$$

$$= \frac{(2-i)(1+2i) - (2+i)(3-i)}{5}$$

$$= \frac{2+4i-i+2-6+2i-3i-1}{5}$$

$$= \frac{-3}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{\overline{z}} = \frac{(1+3i)(3-2i)}{z\overline{z}} = \frac{3-2i+9i+6}{5} = \frac{9}{5} + \frac{7}{5}i$$

التمرين – 9

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1}{3i-5} \quad ; \quad \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1}{1-i} \quad ; \quad \frac{1}{i}$$

الحل – 9

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{3+i\sqrt{2}} = \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \times \frac{3-i\sqrt{2}}{3-i\sqrt{2}} = \frac{3-i\sqrt{2}}{9+2} = \frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}i$$

$$\frac{1}{3i-5} = \frac{1}{-5+3i} \times \frac{-5-3i}{-5-3i} = \frac{-5-3i}{25+9} = \frac{-5}{34} - \frac{3}{34}i$$

التمرين – 10

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1+i}{1-i} \quad ; \quad \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{5+15i}{1+2i} \quad ; \quad \frac{4-6i}{3+2i}$$

الحل – 10

$$\frac{4-6i}{3+2i} = \frac{4-6i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{12-8i-18i-12}{9+4} = \frac{-26}{13}i = -2i$$

$$\frac{5+15i}{1+2i} = \frac{5+15i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5-10i+15i+30}{1+4} = \frac{35}{5} + \frac{5}{5}i = 7+i$$

$$\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \times \frac{3+i\sqrt{2}}{3+i\sqrt{2}} = \frac{3+i\sqrt{2}+3i-\sqrt{2}}{9+2} = \frac{3-\sqrt{2}}{11} + i\left(\frac{3+\sqrt{2}}{11}\right)$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

التمرين – 11

أكتب مرافق كل من الأعداد المركبة التالية على شكله الجبري :

$\dfrac{3 - i}{1 + i}$ ؛ $(1 + 2i)^3$ ؛ $(1 - i)(2 + i)$

الحــل ــ 11

يمكن حل هذا التمرين بطريقتين مختلفين كمايلي :

أولا : إما نكتب هذه الأعداد على شكلها الجبري ثم نبحث عن مرافقها .

ثانيا : أو نستعمل خواص المرافق و نحسب في نفس الوقت .

مثلا : لنبحث عن مرافق العدد $(1 - i)(2 + i)$

الطريقة الأولى : $(1 - i)(2 + i) = 2 + i - 2i + 1 = 3 - i$

إذن : $\overline{(1 - i)(2 + i)} = \overline{3 - i} = 3 + i$

الطريقة الثانية : $\overline{(1 - i)(2 + i)} = \overline{(1 - i)} \times \overline{(2 + i)} = (1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$

إذن : نختار الطريقة الثانية لحل باقي التمرين كمايلي :

$$\begin{aligned}
\overline{(1 + 2i)^3} &= (\overline{(1 + 2i)})^3 \\
&= (1 - 2i)^3 \\
&= (1 - 2i)^2 \times (1 - 2i) \\
&= (1 - 4i - 4)(1 - 2i) \\
&= (-3 - 4i)(1 - 2i) \\
&= -3 + 6i - 4i - 8 \\
&= -11 + 2i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{3 - i}{1 + i}\right)} &= \frac{\overline{3 - i}}{\overline{1 + i}} \\
&= \frac{3 + i}{1 - i} \\
&= \frac{1 + i}{1 + i} \times \frac{3 + i}{1 - i} \\
&= \frac{3 + 3i + i - 1}{1 + 1} \\
&= \frac{2 + 4i}{2} \\
&= 1 + 2i
\end{aligned}$$

التمرين ــ 12

أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي θ فإن :

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

الحــل ــ 12

ليكن θ عدد حقيقي .

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \times \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\
&= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^2}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \quad \text{لأن } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\
&= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad \text{حسب موافر .}
\end{aligned}$$

التمرين ــ 13

ليكن $z_1 = \dfrac{3 - i}{2 + 5i}$ و $z_2 = \dfrac{3 + i}{2 - 5i}$

1 ــ برر دون حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و أن $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف

2 ــ أحسب $z_1 + z_2$ ثم $z_1 - z_2$ ثم إستنتج الشكل الجبري لــ z_1

الحــل ــ 13

1 ــ يكون عدد مركب z حقيقي إذا و فقط إذا كان $z = \overline{z}$

يكون عدد مركب z تخيلي إذا و فقط إذا كان $z = -\overline{z}$

لنستعمل هذه الخواص في السؤال كمايلي :

$$z_1 + z_2 = \frac{3-i}{2+5i} + \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3-i}{2+5i}\right)} + \overline{\left(\frac{3+i}{2-5i}\right)} = \frac{3+i}{2-5i} + \frac{3-i}{2+5i}$$

نتيجة : $z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}$ إذن : $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي .

$$z_1 - z_2 = \frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{3+i}{2-5i} - \frac{3-i}{2+5i} = -\left(\frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}\right) = -(z_1 - z_2)$$

نتيجة : $\overline{z_1 - z_2} = -(z_1 - z_2)$ إذن : $z_1 - z_2$ تخيلي صرف .

2 –

$$z_1 + z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) + (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 + 6 + 15i + 2i - 5}{4+25}$$

$$= \frac{2}{29}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) - (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 - 6 - 15i - 2i + 5}{4+25}$$

$$= \frac{-34}{29} i$$

نتيجة : $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{2}{29} \\ z_1 - z_2 = \frac{-34}{29} i \end{cases}$ منه بالجمع $2z_1 = \frac{2}{29} - \frac{34}{29} i$

إذن : $z_1 = \frac{1}{29} - \frac{17}{29} i$

التمرين – 14

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 – $(1-i)z = 3+i$

2 – $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$

3 – $(3-4i)z^2 = iz$

4 – $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

الحل – 14

1 – $(1-i)z = 3+i$ إذن : $z = \frac{3+i}{1-i}$

أي $z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

أي $z = \frac{3+3i+i-1}{1+1}$

أي $z = 1+2i$

2 – $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$ إذن : $z[3-(1+i)] = 2 - i - 1 - 2i$

أي $(2-i)z = 1 - 3i$

أي $z = \frac{1-3i}{2-i}$

لنستعمل هذه الخواص في السؤال كمايلي :

$$z_1 + z_2 = \frac{3-i}{2+5i} + \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3-i}{2+5i}\right)} + \overline{\left(\frac{3+i}{2-5i}\right)} = \frac{3+i}{2-5i} + \frac{3-i}{2+5i}$$

نتيجة : $z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}$ إذن : $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي .

$$z_1 - z_2 = \frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{3+i}{2-5i} - \frac{3-i}{2+5i} = -\left(\frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}\right) = -(z_1 - z_2)$$

نتيجة : $\overline{z_1 - z_2} = -(z_1 - z_2)$ إذن : $z_1 - z_2$ تخيلي صرف .

2 –

$$z_1 + z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) + (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 + 6 + 15i + 2i - 5}{4+25}$$

$$= \frac{2}{29}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) - (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 - 6 - 15i - 2i + 5}{4+25}$$

$$= \frac{-34}{29} i$$

نتيجة : $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{2}{29} \\ z_1 - z_2 = \dfrac{-34}{29} i \end{cases}$ منه بالجمع $2z_1 = \dfrac{2}{29} - \dfrac{34}{29} i$

إذن : $z_1 = \dfrac{1}{29} - \dfrac{17}{29} i$

التمرين – 14

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 – $(1-i)\,z = 3 + i$

2 – $3z - 2 + i = (1+i)\,z - 1 - 2i$

3 – $(3-4i)\,z^2 = iz$

4 – $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

الحـل – 14

1 – $(1-i)\,z = 3+i$ إذن : $z = \dfrac{3+i}{1-i}$

أي $z = \dfrac{3+i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i}$

أي $z = \dfrac{3+3i+i-1}{1+1}$

أي $z = 1 + 2i$

2 – $3z - 2 + i = (1+i)\,z - 1 - 2i$ إذن : $z[3 - (1+i)] = 2 - i - 1 - 2i$

أي $(2-i)z = 1 - 3i$

أي $z = \dfrac{1-3i}{2-i}$

منه $z = \frac{1-3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$

أي $z = \frac{2+i-6i+3}{4+1}$

أي $z = 1 - i$

3 ـ $(3-4i)z^2 = iz$ إذن : $(3-4i)z^2 - iz = 0$

منه $z[(3-4i)z - i] = 0$

أي $z = 0$ أو $(3-4i)z - i = 0$

أي $z = 0$ أو $z = \frac{i}{3-4i}$

منه $z = 0$ أو $z = \frac{i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i}$

أي $z = 0$ أو $z = \frac{3i-4}{9+16}$

أي $z = 0$ أو $z = \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i$

4 ـ $\frac{z+1}{z-1} = 2i$ تكافئ $\begin{cases} z-1 \neq 0 \\ 2i(z-1) = z+1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z \neq 1 \\ 2iz - 2i - z - 1 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z \neq 1 \\ z(2i-1) = 1+2i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{1+2i}{2i-1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{1+2i}{2i-1} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{-1-2i-2i+4}{1+4} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \end{cases}$

تكافئ $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

التمرين ـ 15

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $2\overline{z} = -1 + i$

الحـل ـ 15

$2\overline{z} = -1 + i$ تكافئ $\overline{z} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$

منه $z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} i$

التمرين – 16

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 – $(2z + 1 - i)(i\overline{z} + i - 2) = 0$

2 – $\frac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i$

الحـل – 16

1 – $(2z + 1 - i)(i\overline{z} + i - 2) = 0$ تكافئ $\begin{cases} 2z + 1 - i = 0 \\ \text{أو} \\ i\overline{z} + i - 2 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1 + i}{2} \\ \text{أو} \\ \overline{z} = \frac{2 - i}{i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ \overline{z} = \frac{2 - i}{i} \times \frac{-i}{-i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ \overline{z} = \frac{-2i - 1}{1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ \overline{z} = -1 - 2i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ z = -1 + 2i \end{cases}$

2 – $\frac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i$ تكافئ $\begin{cases} \overline{z} + 1 \neq 0 \\ i(\overline{z} + 1) = \overline{z} - 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \overline{z} \neq -1 \\ \overline{z}(i - 1) = -1 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \overline{z} \neq -1 \\ \overline{z} = \frac{-1 - i}{i - 1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \overline{z} \neq -1 \\ \overline{z} = \frac{-1 - i}{-1 + i} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \overline{z} \neq -1 \\ \overline{z} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \overline{z} \neq -1 \\ \overline{z} = i \end{cases}$

تكافئ $z = -i$

التمرين – 17

أكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافق كل من الأعداد المركبة التالية :

$2 + 3iz$ ؛ $(2 + iz)(1 + 4z)$ ؛ $\frac{2 + iz}{z + 2}$ ؛ $z^3 - iz^2 + 3z - 3i$

الحـل ـ 17

$$\overline{2+3iz}=2-3i\overline{z}$$

$$\overline{(2+iz)(1+4z)}=(2-i\overline{z})(1+4\overline{z})$$

$$\overline{\left(\frac{2+iz}{z+2}\right)}=\frac{2-i\overline{z}}{\overline{z}+2}$$

$$\overline{z^3-iz^2+3z-3i}=(\overline{z})^3+i(\overline{z})^2+3\overline{z}+3i$$

التمرين ـ 18

M نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد المركب z

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون العدد $z+\frac{1}{z}$ حقيقيا .

الحـل ـ 18

ليكن $z=x+iy$

$z+\frac{1}{z}$ حقيقي يكافئ $\begin{cases} z\neq 0 \\ \frac{z^2+1}{z}\in R \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ \frac{(x+iy)^2+1}{x+iy}\in R \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ \frac{(x^2-y^2+1)+2xyi}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy} \text{ حقيقي} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ \frac{x(x^2-y^2+1)-y(x^2-y^2+1)i+2x^2yi+2xy^2}{x^2+y^2} \text{ حقيقي} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ \frac{x^3-xy^2+x+2xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2x^2y-x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}\,i \text{ حقيقي} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ 2x^2y-x^2y+y^3-y=0 \end{cases}$ (الجزء التخيلي معدوم)

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ x^2y+y^3-y=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ y(x^2+y^2-1)=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x;y)\neq(0;0) \\ y=0 \text{ أو } x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

إذن : مجموعة النقط M المطلوبة هي إتحاد المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (محور الفواصل) و نقط الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-1=0$ (مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها 1) باستثناء المبدأ ذو الإحداثيات $(0;0)$ لأن $(x;y)\neq(0;0)$

التمرين ـ 19

A ، B ، C ، D أربع نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $-2+i$ ؛ $-1+4i$ ؛ $3+2i$ و $2-i$

برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

الحـل ـ 19

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

إذن : يكفي أن نثبت أن لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويتين .

لاحقة $\overrightarrow{AB}$: $(-1+4i)-(-2+i) = -1+4i+2-i = 1+3i$

لاحقة $\overrightarrow{DC}$: $(3+2i)-(2-i) = 3+2i-2+i = 1+3i$

نتيجة : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ لهما نفس اللاحقة إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

منه : ABCD متوازي أضلاع

التمرين – 20

z_A ؛ z_B ؛ z_C هي لواحق النقط $A(\sqrt{3}\,;1)$ ؛ $B(-\sqrt{3}\,;-1)$ ؛ $C(0\,;2)$ على الترتيب . عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

الحـل – 20

ABCD متوازي أضلاع يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

يكافئ $z_B - z_A = z_C - z_D$

يكافئ $z_D = z_C - z_B + z_A$

يكافئ $z_D = 0 + 2i + \sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i$

يكافئ $z_D = 2\sqrt{3} + 4i$

التمرين – 21

A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب $3+2i$ ؛ $-1+3i$ ؛ $-2-2i$

1 – عين لاحقة النقطة I منصف القطعة [AB]

2 – عين لاحقة المرجح G للجملة $\{(A\,;2)\,;(B\,;-3)\,;(C\,;5)\}$

الحـل – 21

لتكن z_A ؛ z_B ؛ z_C لواحق النقط A ؛ B ؛ C على الترتيب

1 – لاحقة منتصف [AB] هي $\frac{z_A + z_B}{2}$ أي $\frac{3+2i-1+3i}{2}$

منه : لاحقة النقطة I هي $1 + \frac{5}{2}i$

2 – لاحقة المرجح G هي : $\frac{2z_A - 3z_B + 5z_C}{2-3+5}$

إذن لاحقة G هي : $z_G = \frac{2(3+2i) - 3(-1+3i) + 5(-2-2i)}{2-3+5}$

أي $z_G = \frac{6+4i+3-9i-10-10i}{4}$

منه : $z_G = -\frac{1}{4} - \frac{15}{4}i$

التمرين – 22

A ؛ B ؛ C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $2+i$ ؛ $2-i$ ؛ i

عين لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD

الحـل – 22

لتكن z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب

لاحقة مركز ثقل المثلث DCB هي $\frac{1}{3}(z_D + z_C + z_B)$

إذن : تكون A مركز ثقل المثلث DCB إذا وفقط إذا كان $z_A = \frac{1}{3}(z_D + z_C + z_B)$

أي : $3z_A = z_D + z_C + z_B$

أي : $z_D = 3z_A - z_C - z_B$

منه : $z_D = 3(2+i) - (i) - (2-i)$

منه : $z_D = 4 + 3i$

التمرين – 23

من أجل كل عدد مركب z نضع $f(z) = z^2 - z$ حيث $z = x + iy$ (مع x و y عددان حقيقيان)

برهن أن $\begin{cases} Re(f(z)) = x^2 - y^2 - x \\ Im(f(z)) = y(2x-1) \end{cases}$

الحـــل ــ 23

$$f(z) = z^2 - z = (x + i\,y)^2 - (x + i\,y) = (x^2 - y^2 - x) + i(2\,x\,y - y)$$

إذن : $\begin{cases} Re(f(z)) = x^2 - y^2 - x \\ Im(f(z)) = 2\,x\,y - y = y(2\,x - 1) \end{cases}$

التمرين ــ 24

z_A ؛ z_B ؛ z_C هي على الترتيب لواحق النقط $A(\sqrt{3}\,;1)$ ؛ $B(-\sqrt{3}\,;-1)$ ؛ $C(2\,;0)$

1 ــ أحسب $|z_A|$ ؛ $|z_B|$ ؛ $|z_C|$ ماذا تستنتج ؟

الحـــل ــ 24

1 ــ $|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$ ؛ $|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$ ؛ $|z_C| = \sqrt{4+0} = 2$

إذن : النقط A ، B ، C تبعد بنفس المسافة 2 عن المبدأ .

منه : A ، B ، C هي نقط من الدائرة التي مركزها $O(0\,;0)$ و نصف قطرها 2

التمرين ــ 25

A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب $z_A = 2$ ؛ $z_B = -i$ ؛ $z_C = 1 + 2\,i$

1 ــ أحسب $|z_B - z_A|$ ؛ $|z_B - z_C|$ ؛ $|z_C - z_A|$

2 ــ إستنتج طبيعة المثلث ABC

الحـــل ــ 25

1 ــ

$$|z_B - z_A| = |-i - 2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|z_B - z_C| = |-i - 1 - 2\,i| = |-1 - 3\,i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$|z_C - z_A| = |1 + 2\,i - 2| = |-1 + 2\,i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

2 ــ **نتيجة :** $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ إذن : $AB = AC$ منه ABC متساوي الساقين .

$|z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2 = |z_B - z_C|^2$ إذن : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ منه ABC قائم في A

خلاصة : ABC مثلث قائم الزاوية في A و متساوي الساقين .

التمرين ــ 26

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق المساواة المقترحة :

1 ــ $|z| = 2$

2 ــ $|-3\,z| = \sqrt{2}$

3 ــ $|z|^2 - 2\,Re(z) = 0$

الحـــل ــ 26

ليكن $z = x + i\,y$ لاحقة النقطة M

1 ــ $|z| = 2$ يكافئ $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

يكافئ $x^2 + y^2 = 4$

إذن : مجموعة النقط M هي نقط الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها $\sqrt{4} = 2$

2 ــ $|-3\,z| = \sqrt{2}$ يكافئ $3|z| = \sqrt{2}$

يكافئ $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

يكافئ $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

يكافئ $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

إذن : مجوعة النقط M هي الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

3 ــ $|z|^2 - 2\,Re(z) = 0$ تكافئ $x^2 + y^2 - 2\,x = 0$

تكافئ $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(1\,;0)$ و نصف قطرها 1

التمرين ــ 27

z عدد مركب . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ $|z + 1 + 2\,i| = |z - 4|$

2 ــ $|z - 3\,i| = 2$

3 ـــ $|2z - i| = 2$

الحـل ـــ 27

ليكن $z = x + iy$ (الشكل الجبري لـــ z)

1 ـــ $|z+1+2i| = |z-4|$ يكافئ $|x+iy+1+2i| = |x+iy-4|$

يكافئ $|x+1+(y+2)i| = |x-4+iy|$

يكافئ $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$

يكافئ $x^2+2x+1+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2$

يكافئ $10x+4y-11=0$

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $10x+4y-11=0$

2 ـــ $|z-3i| = 2$ يكافئ $|x+iy-3i| = 2$

يكافئ $|x+i(y-3)| = 2$

يكافئ $\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2$

يكافئ $x^2+(y-3)^2 = 4$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(0\,;3)$ و نصف قطرها 2

3 ـــ $|2z-i| = 2$ تكافئ $|2x+2iy-i| = 2$

تكافئ $|2x+i(2y-1)| = 2$

تكافئ $\sqrt{4x^2+(2y-1)^2} = 2$

تكافئ $4x^2+(2y-1)^2 = 4$

تكافئ $4x^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 4$

تكافئ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها 1

التمرين ـــ 28

α عدد مركب حيث $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1 ـــ أحسب α^2 ثم α^4

2 ـــ أحسب $|\alpha^4|$ ثم إستنتج $|\alpha|$

3 ـــ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|\alpha z| = 6$

الحـل ـــ 28

1 ـــ $\alpha^2 = 2-\sqrt{2}-2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}-(2+\sqrt{2})$

$= 2-\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}-2-\sqrt{2}$

$= -2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

$= -2\sqrt{2}(1+i)$

منه : $\alpha^4 = [-2\sqrt{2}(1+i)]^2$

$= 8(1+i)^2$

$= 8(1+2i-1)$

$= 16i$

2 ـــ $|\alpha^4| = |16i| = 16$

لكن $|\alpha^4| = |\alpha|^4$

أي : $16 = |\alpha|^4$

منه : $|\alpha| = \sqrt[4]{16}$ إذن : $|\alpha| = 2$

3 ـــ $|\alpha z| = 6$ تكافئ $|\alpha|\,.\,|z| = 6$

تكافئ $2|z| = 6$

تكافئ $|z| = 3$

إذن : مجموعة النقط M هي النقط التي تبعد بمسافة 3 عن المبدأ

أي هي الدائرة التي مرذكزها $O(0\,;\,0)$ و نصف قطرها 3

التمرين ــ 29

z عدد مركب غير معدوم .

1 ــ باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\text{Arg}(z^n) = n\,\text{Arg}(z)$

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم p فإن $\text{Arg}(z^p) = p\,\text{Arg}(z)$

الحـل ــ 29

1 ــ من أجل $n = 1$: الخاصية محققة لأن $\text{Arg}(z^1) = 1 \times \text{Arg}(z)$

من أجل $n = 2$: $\text{Arg}(z^2) = \text{Arg}(z \times z) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z) = 2\,\text{Arg}(z)$

إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن $\text{Arg}(z^n) = n\,\text{Arg}(z)$ من أجل $n > 2$

هل $\text{Arg}(z^{n+1}) = (n+1)\,\text{Arg}(z)$ ؟

لدينا : $\text{Arg}(z^{n+1}) = \text{Arg}(z^n \times z)$

$= \text{Arg}(z^n) + \text{Arg}(z)$

$= n\,\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z)$

$= (n+1)\,\text{Arg}(z)$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $(n + 1)$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\text{Arg}(z^n) = n\,\text{Arg}(z)$

2 ــ ليكن $p \in Z^*$ إذن : إما $p = n$ أو $p = -n$ حيث $n \in IN^*$

الحالة الأولى : $p = n$ حيث $n \in IN^*$

الخاصية محققة حسب السؤال (1)

الحالة الثانية : $p = -n$ حيث $n \in IN^*$

إذن : $z^p = z^{-n}$

منه : $z^p = \dfrac{1}{z^n}$

إذن : $\text{Arg}(z^p) = \text{Arg}\left(\dfrac{1}{z^n}\right)$

أي $\text{Arg}(z^p) = \text{Arg}(1) - \text{Arg}(z^n)$

أي $\text{Arg}(z^p) = 0 - \text{Arg}(z^n)$

أي : $\text{Arg}(z^p) = -n\,\text{Arg}(z)$

منه : $\text{Arg}(z^p) = p\,\text{Arg}(z)$ لأن $p = -n$

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n فإن $\text{Arg}(z^n) = n\,\text{Arg}(z)$

التمرين ــ 30

z عدد مركب غير معدوم حيث $|z| = R$ و $\text{Arg}(z) = \theta$

عين عمدة و طويلة كل من الأعداد التالية :

$$-z \quad ; \quad \overline{z} \quad ; \quad \frac{1}{z} \quad ; \quad z^3 \quad ; \quad \frac{1}{z^n} \text{ حيث } n \in Z^*$$

الحـل ــ 30

$\left.\begin{array}{l}|z| = R\\ \text{Arg}(z) = \theta\end{array}\right\}$ إذن : $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

1 ــ $-z = -R(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= R(-\cos\theta - i\sin\theta)$

$= R[\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)]$

إذن : $\left\{\begin{array}{l}|-z| = R\\ \text{Arg}(-z) = \pi + \theta\end{array}\right.$

2 ــ $\overline{z} = R[\cos\theta - i\sin\theta] = R[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

إذن : $\left\{\begin{array}{l}|\overline{z}| = R\\ \text{Arg}(\overline{z}) = -\theta\end{array}\right.$

3 – $\begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ Arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0 - Arg(z) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R} \\ Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta \end{cases}$

4 – $\begin{cases} |z^3| = |z|^3 \\ Arg(z^3) = 3\,Arg(z) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} |z^3| = R^3 \\ Arg(z^3) = 3\,\theta \end{cases}$

5 – $\begin{cases} \left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z^n|} \\ Arg\left(\frac{1}{z^n}\right) = 0 - Arg(z^n) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{R^n} \\ Arg\left(\frac{1}{z^n}\right) = -n\,\theta \end{cases}$

التمرين – 31

z عدد مركب غير معدوم طويلته R و عمدته θ
عين طويلة و عمدة كل من الأعداد التالية :

$$\frac{z}{4} \ ; \ \frac{-7}{z} \ ; \ 2iz \ ; \ (iz)^5 \ ; \ \left(\frac{iz}{R}\right)^n$$

الحـل – 31

في هذا التمرين نستعمل الخاصية التالية : t عدد مركب غير معدوم .
إذا كان t عدد حقيقي موجب فإن $Arg(t) = 0$
إذا كان t عدد حقيقي سالب فإن $Arg(t) = \pi$
إذا كان t عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي موجب فإن $Arg(t) = \pi/2$
إذا كان t عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب فإن $Arg(t) = -\pi/2$

1 – $\left|\frac{z}{4}\right| = \frac{|z|}{|4|} = \frac{R}{4}$ ؛ $Arg\left(\frac{z}{4}\right) = Arg(z) - Arg(4) = \theta$

2 – $\left|\frac{-7}{z}\right| = \frac{|-7|}{|z|} = \frac{7}{R}$ ؛ $Arg\left(\frac{-7}{z}\right) = Arg(-7) - Arg(z) = \pi - \theta$

3 – $|2iz| = |2i| \times |z| = 2R$ ؛ $Arg(2iz) = Arg(2i) + Arg(z) = \frac{\pi}{2} + \theta$

4 – $|iz|^5 = (|i| \times |z|)^5 = R^5$ ؛ $Arg(iz)^5 = 5\,Arg(iz) = 5[arg(i) + Arg(z)] = 5\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

5 – $\left|\frac{iz}{R}\right|^n = \left[\frac{|iz|}{|R|}\right]^n = \left(\frac{R}{R}\right)^n = 1$ ؛ $Arg\left(\frac{iz}{R}\right)^n = n\,Arg\left(\frac{iz}{R}\right) = n[Arg(iz) - Arg(R)]$

إذن : $Arg\left(\frac{iz}{R}\right)^n = n\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

التمرين – 32

في كل حالة من الحالات التالية عين طويلة و عمدة العدد المركب z

1 – $z_1 = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ **3 –** $z_3 = \sqrt{5}\left[\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$

2 – $z_2 = -3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ **4 –** $z_4 = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

الحـل – 32

1 – $z_1 = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ شكل مثلثي

إذن : $|z_1| = 4$ و $Arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$

2 – $z_2 = -3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 3\left[-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 3\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$ شكل مثلثي

إذن : $|z_2| = 3$ و $\text{Arg}(z_2) = \pi + \frac{\pi}{3}$

3 ـ $z_3 = \sqrt{5}\left[\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$

$= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ شكل مثلثي

إذن : $|z_3| = \sqrt{5}$ و $\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

4 ـ $z_4 = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$ شكل مثلثي

إذن : $|z_4| = 1$ و $\text{Arg}(z_4) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$

التمرين ـ 33

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_5 = 3$ ؛ $z_6 = -i$ ؛ $z_7 = \frac{1}{2}i$ ؛ $z_8 = -\sqrt{5}$

الحـل ـ 33

في كل مرة نعتبر θ هي عمدة العدد المركب و R هي طويلته

1 ـ $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ إذن : $z_1 = 1\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{4}$

2 ـ $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ إذن : $z_2 = 1\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$

3 ـ $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ إذن : $z_3 = 1\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$

4 ـ $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ إذن : $z_4 = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

5 ـ $z_5 = 3$ إذن : $z_5 = 3[\cos 0 + i\sin 0]$ شكل مثلثي

6 ـ $z_6 = -i$ إذن : $z_6 = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ شكل مثلثي

7 ـ $z_7 = \frac{1}{2}i$ إذن : $z_7 = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$ شكل مثلثي

8 ـ $z_8 = -\sqrt{5}$ إذن : $z_5 = \sqrt{5}[\cos\pi + i\sin\pi]$ شكل مثلثي

التمرين ـ 34

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها المثلثي

$1 + i$ ؛ $3 - 3i$ ؛ $-\sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ؛ $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

الحـل ـ 34

1 ـ $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ لتكن θ عمدة له

إذن : $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$ إذن : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

منه : $1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

2 ـ $|3 - 3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ لتكن θ عمدة له

$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$ إذن : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

منه : $3 - 3i = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

3 ـ $|-\sqrt{5} - i\sqrt{15}| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$ لتكن θ عمدة له

$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ منه : $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

منه : $-\sqrt{5} - i\sqrt{15} = 2\sqrt{5}\left[\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right]$

4 ـ $|-\sqrt{6} + i\sqrt{2}| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$ لتكن θ عمدة له

$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ إذن : $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

منه : $-\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right]$

التمرين ـ 35

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

1 ـ $z_1 = (2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$ **3 ـ** $z_3 = \dfrac{3i}{2 + 2i\sqrt{3}}$

2 ـ $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3} + i}$ **4 ـ** $z_4 = \dfrac{\sqrt{6}}{1 + i}$

الحـل ـ 35

في هذا التمرين نستعمل خواص العمدة و الطويلة كمايلي :

1 ـ $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

منه : $\left\{\begin{array}{l}|z_1| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}\\ Arg(z_1) = \dfrac{\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{12}\end{array}\right.$

إذن : $z_1 = 4\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right]$

2 ـ $4 = 4[\cos 0 + i\sin 0]$

$\sqrt{3} + i = 2\left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right]$

إذن : $|z_2| = 4/2 = 2$ ، $Arg(z_2) = 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

إذن : $z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

3 – $3i = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

$2 + 2i\sqrt{3} = 4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

إذن : $|z_3| = 3/4$ ، $Arg(z_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

إذن : $z_3 = \frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

4 – $\sqrt{6} = \sqrt{6}\,[\cos 0 + i\sin 0]$

$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

إذن : $|z_4| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ ، $Arg(z_4) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

منه : $z_4 = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

التمرين – 36

ليكن $z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

1 – أكتب z على شكله الجبري .

2 – أكتب z على شكله المثلثي

3 – اكتب على شكلها المثلثي, كل من الأعداد $\frac{1}{z}$ ؛ z^{2009} ؛ $\bar{z}$

الحـل – 36

1 –
$$z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{4+4i\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}}{1+3}$$
$$= \frac{4-4\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{4\sqrt{3}+4}{4}$$
$= (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$ و هو الشكل الجبري لـ z

2 – $4 + 4i = 4\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

إذن : $|z| = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ، $Arg(z) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$

نتيجة : $z = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$ شكل مثلثي لـ z

3 – $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ، $Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg(z) = -\frac{7\pi}{12}$

منه $\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} |z^{2009}| = |z|^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009} \\ \text{Arg}(z^{2009}) = 2009\ \text{Arg}(z) = 2009 \times \dfrac{7\pi}{12} \end{array}\right\}$$

لاحظ أن : $\dfrac{2009 \times 7\pi}{12} = \dfrac{14063}{12}\pi = 1172\pi - \dfrac{\pi}{12}$

إذن : $\text{Arg}(z^{2009}) = -\dfrac{\pi}{12}$

$$z^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

لدينا : $|\overline{z}| = |z|$ و $\overline{z} = \overline{z} \times \dfrac{z}{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$

إذن : $\text{Arg}(\overline{z}) = \text{Arg}(|z|^2) - \text{Arg}(z) = 0 - \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-7\pi}{12}$

منه : $\overline{z} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$

التمرين ــ 37

ليكن $z = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2(1-i)}$

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها الجبري : z^6 ؛ z^{12} ؛ z^{2010}

الحــل ــ 37

لنبحث أولا عن الشكل المثلثي للعدد z كما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right] \\ 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] \end{array}\right\}$$

منه

$$\left.\begin{array}{l} |z| = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \\ \text{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{7\pi}{12} \end{array}\right\}$$

نتيجة : $z = \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(7\dfrac{\pi}{12}\right)$

باستعمال قانون موافر نحصل على النتائج التالية :

$$z^6 = \cos\left(6 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(6 \times \frac{7\pi}{12}\right)$$
$$= \cos\left(7\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0 - i$$
$$= -i$$

14070	12
20	1172
87	
84	
30	
6	

$$z^{12} = \cos\left(12 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(12 \times \frac{7\pi}{12}\right)$$
$$= \cos 7\pi + i\sin 7\pi$$
$$= -1$$

$$z^{2010} = \cos\left(2010 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(2010 \times \frac{7\pi}{12}\right)$$
$$= \cos\left(1172\pi + 6\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(1172\pi + 6\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= i$$

التمرين ـــ 38

أكتب على شكلها الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$$2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} \;;\quad \frac{1}{2}e^{i\pi} \;;\quad \sqrt{5}\,e^{i\frac{3\pi}{2}} \;;\quad 6\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

الحــل ـــ 38

$$6\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$$
$$= 6\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5}\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{5}\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$$
$$= \sqrt{5}\,[0 - i]$$
$$= -i\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}\,[\cos\pi + i\sin\pi]$$
$$= \frac{1}{2}\,[-1 + 0\,i]$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$
$$= -\sqrt{3} - 3i$$

التمرين ـــ 39

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسي :

1 ـ $2 - 2i$ 3 ـ $\frac{5}{4}i$

2 ـ $3\sqrt{3} - 3i$ 4 ـ -1

الحــل ـــ 39

1 ـ $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2 ـ $3\sqrt{3} - 3i = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 6\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

3 ـ $\frac{5}{4}i = \frac{5}{4}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{5}{4}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

4 ـ $-1 = 1[\cos\pi + i\sin\pi] = e^{i\pi}$

التمرين ـــ 40

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية :

1 ـ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$ 3 ـ $-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2 ـ $-3\,e^{i\frac{\pi}{8}}$

الحــل ـــ 40

في هذا التمرين نستعمل الخاصية $-1 = e^{i\pi}$

1 ـ $-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{12})} = e^{i\frac{13}{12}\pi}$

– 2 $$-3e^{i\frac{\pi}{8}} = 3 \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}} = 3 \times e^{\frac{9\pi}{8}i}$$

– 3 $$-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} \times e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

التمرين – 41

أعط الشكل الأسي لكل من الأعداد المركبة التالية :

– 1 $z_1 = (2\sqrt{3} + 6i)\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ **– 3** $z_3 = (1 - \sqrt{2})\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

– 2 $z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ **– 4** $z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

الحـل – 41

– 1
$$\begin{aligned} z_1 &= (2\sqrt{3} + 6i)\,e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\sqrt{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

– 2
$$\begin{aligned} z_2 &= (\sqrt{3} + i\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3}\,.\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{6}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{6}\,e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

– 3
$$\begin{aligned} z_3 &= (1 - \sqrt{2})\,e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= (\sqrt{2} - 1)(\cos\pi + i\sin\pi)\,e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= (\sqrt{2} - 1)\,e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= (\sqrt{2} - 1)\,e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

– 4
$$\begin{aligned} z_4 &= 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) \\ &= 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right] \\ &= 3\,e^{-i\frac{\pi}{7}} \end{aligned}$$

التمرين – 42

في كل حالة مما يلي اكتب العدد المركب z على شكله الأسي ثم إستنتج الشكل الجبري لــ $\overline{z}$ و $\frac{1}{z}$:

– 1 $z = \frac{6}{1+i}$ **– 2** $z = (1 + i\sqrt{3})^4$

– 3 $z = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

الحـل – 42

في هذا التمرين نستعمل الخاصيتين التاليتين :

$$\overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2}\,\overline{z}$$

1 — $z = \frac{6}{1+i}$ إذن : $z = \frac{6(\cos 0 + i\sin 0)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

منه : $z = \frac{6\,e^{i0}}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}$

أي $z = \frac{6}{\sqrt{2}}\,e^{-i\pi/4}$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} \bar{z} = \frac{6}{\sqrt{2}}\,e^{i\pi/4} = \frac{6}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 3 + 3i \\ \frac{1}{z} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 \times (3+3i) = \frac{2}{36}(3+3i) = \frac{1}{6} + \frac{i}{6} \end{array}\right.$

2 — $z = (1 + i\sqrt{3})^4$ إذن : $z = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4$

أي $z = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4$

أي $z = 16\,e^{4i\frac{\pi}{3}}$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} \bar{z} = 16\,e^{-4i\frac{\pi}{3}} = 16\left[-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -8 + 8i\sqrt{3} \\ \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \times (-8 + 8i\sqrt{3}) = \frac{-1}{32} + \frac{1}{32}\,i\sqrt{3} \end{array}\right.$

3 — $z = 3i\,e^{i\pi/3}$ إذن : $z = 3 \times e^{i\pi/2} \times e^{i\pi/3}$

أي $z = 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} \bar{z} = 3\,e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = \frac{-3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \\ \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right] = \frac{-1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\,i \end{array}\right.$

التمرين — 43

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 — $2z^2 - 6z + 5 = 0$ **5** — $z^2 - 5z + 9 = 0$

2 — $z^2 + z + 1 = 0$ **6** — $z^2 - 2z + 3 = 0$

3 — $z^2 = z + 1$ **7** — $z^2 + 3 = 0$

4 — $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$ **8** — $z^2 - 2(1+\sqrt{2})\,z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

الحـل — 43

1 — $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$

إذن : $\Delta = (2i)^2$

منه : حلول المعادلة هي $\left\{\begin{array}{l} z_1 = \frac{6 - 2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,i \\ z_2 = \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i \end{array}\right.$

2 — $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

منه حلول المعادلة هي $\left\{\begin{array}{l} z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

3 ـ $z^2 = z + 1$ تكافئ $z^2 - z - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1) = 5 = (\sqrt{5})^2$

منه حلول المعادلة هي $\begin{cases} z_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ z_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

4 ـ $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$

$\Delta = 64 \times 3 - 4 \times 64 = -64 = (8\,i)^2$

إذن حلول المعادلة هي : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} - 8\,i}{2} = 4\sqrt{3} - 4\,i \\ z_2 = \dfrac{8\sqrt{3} + 8\,i}{2} = 4\sqrt{3} + 4\,i \end{cases}$

5 ـ $z^2 - 5\,z + 9 = 0$

$\Delta = 25 - 4(9) = -11 = (i\sqrt{11})^2$

إذن حلول المعادلة هي $\begin{cases} z_1 = \dfrac{5 - i\sqrt{11}}{2} = \dfrac{5}{2} - i\dfrac{\sqrt{11}}{2} \\ z_2 = \dfrac{5 + i\sqrt{11}}{2} = \dfrac{5}{2} + i\dfrac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$

6 ـ $z^2 - 2\,z + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 = (2\,i\sqrt{2})^2$

إذن : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2 - 2\,i\sqrt{2}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \\ z_1 = \dfrac{2 + 2\,i\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2} \end{cases}$

7 ـ $z^2 + 3 = 0$ تكافئ $z^2 = -3$

تكافئ $z = i\sqrt{3}$ أو $z = -i\sqrt{3}$

8 ـ $z^2 - 2(1+\sqrt{2})\,z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

$\Delta = 4(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 8(\sqrt{2} + 2) = 12 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 16 = -4 = (2\,i)^2$

إذن : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}) - 2\,i}{2} = (1+\sqrt{2}) - i \\ z_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}) + 2\,i}{2} = (1+\sqrt{2}) + i \end{cases}$

التمرين ـ 44

θ عدد حقيقي ثابت . حل في C المعادلة التالية ذات المجهول z :

1 ـ $z^2 - 2(\cos\theta)\,z + 1 = 0$

2 ـ $z^2 - 2(\sin\theta)\,z + 1 = 0$

الحـل ـ 44

1 ـ $z^2 - 2(\cos\theta)\,z + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2\,i\sin\theta)^2$ لأن $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$

إذن حلول المعادلة هي $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2\cos\theta - 2\,i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta \\ z_2 = \dfrac{2\cos\theta + 2\,i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$

2 ـ $z^2 - 2(\sin\theta)\,z + 1 = 0$

$\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1) = -4\cos^2\theta = (2\,i\cos\theta)^2$ لأن $\sin^2\theta - 1 = -\cos^2\theta$

إذن حلول المعادلة هي

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{2\sin\theta - 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta - i\cos\theta \\ z_2 = \dfrac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta \end{array}\right\}$$

التمرين – 45

حل في C^2 الجملة التالية ذات المجهولين المركبين z و t :

$$\left.\begin{array}{l} zt = 5 \\ z + t = -2 \end{array}\right\}$$

الحـل – 45

إذا وجد z و t فإنهما حلول للمعادلة $z^2 + 2z + 5 = 0$ (مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة 2)

إذن يكفي حل هذه المعادلة في C كمايلي :

$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

إذن : $\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-2-4i}{2} = -1-2i \\ z_2 = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i \end{array}\right\}$

نتيجة : $(z\,;t) \in \{(-1-2i\,;-1+2i)\,;(-1+2i\,;-1-2i)\}$

تحقيق : $(-1-2i) + (-1+2i) = -2$

$(-1-2i)(-1+2i) = 1 + 4 = 5$

التمرين – 46

أوجد العددين المركبين α و β حتى تكون حلول المعادلة $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ في C هي $1 + 2i$ و $3 - 5i$

الحـل – 46

مجموع الحلين هو : $(3-5i) + (1+2i) = 4 - 3i$

جداء الحلين هو : $(3-5i)(1+2i) = 3 + 6i - 5i + 10 = 13 + i$

إذن : المعادلة التي حلولها $(3-5i)$ و $(1+2i)$ هي $z^2 - (4-3i)z + 13 + i = 0$

منه : $\alpha = -(4-3i)$ و $\beta = 13 + i$

ملاحظة : يمكن البحث عن α و β بطريقة أخرى كمايلي :

$$(z-(1+2i))(z-(3-5i)) = z^2 - (3-5i)z - (1+2i)z + (1+2i)(3-5i)$$
$$= z^2 - z(3 - 5i + 1 + 2i) + 3 - 5i + 6i + 10$$
$$= z^2 - (4-3i)z + 13 + i$$

بالمطابقة مع $z^2 + \alpha z + \beta$ فإن $\left.\begin{array}{l} \alpha = -(4-3i) \\ \beta = 13 + i \end{array}\right\}$

التمرين – 47

حل في C المعادلة $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

الحـل – 47

نضع $t = z^2$ و نحل المعادلة $t^2 + 3t + 2 = 0$ ذات المجهول المركب t

$\Delta = 9 - 8 = 1$

إذن : $\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \\ t_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1 \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} z^2 = -2 \\ \text{أو} \\ z^2 = -1 \end{array}\right\}$ أي $z = i\sqrt{2}$ أو $z = -i\sqrt{2}$ أو $z = i$ أو $z = -i$

نتيجة : حلول المعادلة هي $\{\, i\,;-i\,;i\sqrt{2}\,;-i\sqrt{2}\,\}$

التمرين – 48

حل في C المعادلة $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

الحـل – 48

نضع $t = z^2$ و نحل المعادلة $t^2 - 32t - 144 = 0$

$$\Delta = (32)^2 + 4 \times 144 = 64 \times 16 + 64 \times 9 = 64 \times 25 = (40)^2$$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{32-40}{2} = -4 \\ t_2 = \dfrac{32+40}{2} = 36 \end{array}\right.$

منه : $\left\{\begin{array}{l} z^2 = -4 \\ z^2 = 36 \end{array}\right.$ إذن : $z \in \{2i ; -2i ; 6 ; -6\}$

أي حلول المعادلة هي $\{2i ; -2i ; 6 ; -6\}$

التمرين ــ 49

1 ــ حل في C المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ ثم أكتب الحلول على شكلها المثلثي .

2 ــ إستنتج حلول المعادلة $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$ (I).......

الحـل ــ 49

1 ــ $z^2 - 2z + 2 = 0$:

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{2-2i}{2} = 1 - i \\ z_2 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i \end{array}\right.$$

الشكل المثلثي للحلول :

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \end{array}\right.$$

2 ــ المعادلة (I) تكافئ $\left\{\begin{array}{l} t = -iz + 3i + 3 \\ t^2 - 2t + 2 = 0 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} t = -iz + 3i + 3 \\ t \in \{1 - i ; 1 + i\} \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 1 - i = -iz + 3i + 3 \\ \text{أو} \\ 1 + i = -iz + 3i + 3 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} -iz = 1 - i - 3i - 3 \\ \text{أو} \\ -iz = 1 + i - 3i - 3 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{-2-4i}{-i} \\ \text{أو} \\ z = \dfrac{-2-2i}{-i} \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{-2-4i}{-i} \times \dfrac{i}{i} \\ \text{أو} \\ z = \dfrac{-2-2i}{-i} \times \dfrac{i}{i} \end{array}\right.$

تكافئ $z \in \{4 - 2i ; 2 - 2i\}$ و هي حلول المعادلة

التمرين ــ 50

1 ــ عين الجذرين التربيعيين للعدد $L = 2 - 2i\sqrt{3}$

2 ــ حل في C المعادلة $2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0$

الحـل ــ 50

1 ــ ليكن $L = (\alpha + i\beta)^2$ حيث $\alpha \in R$ و $\beta \in R$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{2+|L|}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{4+12}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+4}{2}} = \sqrt{3} \\ \beta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\alpha} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$ (أنظر الدرس)

نتيجة : $L = (\sqrt{3} - i)^2$

تحقيق : $(\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} - 1 = L$

2 ـ $2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0$

$$\Delta = -16 - 4(2)(i\sqrt{3} - 3) = -16 - 8i\sqrt{3} + 24 = 8 - 8i\sqrt{3} = 4(2 - 2i\sqrt{3})$$

إذن : $\Delta = 4L$

منه : $\Delta = [2(\sqrt{3} - i)]^2$ أي $\Delta = (2\sqrt{3} - 2i)^2$

إذن : $$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-4i - (2\sqrt{3} - 2i)}{4} = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2i}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ z_2 = \dfrac{-4i + (2\sqrt{3} - 2i)}{4} = \dfrac{2\sqrt{3} - 6i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \end{cases}$$

التمرين ـ 51

1 ـ عين العدد الحقيقي x حيث $(x + 2i)^2 = -3 + 4i$

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0$

الحـل ـ 51

1 ـ $(x + 2i)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow x^2 + 4ix - 4 = -3 + 4i$

$\Leftrightarrow x^2 + 4ix = 1 + 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ 4x = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1$

نتيجة : $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$

2 ـ $z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (3 - 4i)^2 - 4(-1 - 7i) \\ &= 9 - 24i - 16 + 4 + 28i \\ &= -3 + 4i \\ &= (1 + 2i)^2 \end{aligned}$$ حسب السؤال الأول

إذن : $$\begin{cases} z_1 = \dfrac{3 - 4i - (1 + 2i)}{2} = 1 - 3i \\ z_2 = \dfrac{3 - 4i + (1 + 2i)}{2} = 2 - i \end{cases}$$

التمرين ـ 52

لتكن المعادلة $(1)\ldots\ldots\ z^2 - (\sqrt{3} + 1 + 2i)z + (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i = 0$

أحسب $(\sqrt{3} - 1)^2$ ثم حل في C المعادلة (1)

الحـل ـ 52

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= [(\sqrt{3} + 1) + 2i]^2 - 4[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i] \\ &= 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 4i(\sqrt{3} + 1) - 4 - 4(\sqrt{3} - 1) - 4i(\sqrt{3} + 1) \\ &= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4 \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 \end{aligned}$$ حسب السؤال الأول

منه حلول المعادلة هي :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1+2i-(\sqrt{3}-1)}{2} = 1+i \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1+2i+(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}+i \end{cases}$$

التمرين – 53

أحسب $(\sqrt{3}+3i)^2$ ثم حل في C المعادلة $2z^2+(3\sqrt{3}+i)z+4=0$

الحل – 53

$$(\sqrt{3}+3i)^2 = 3+6i\sqrt{3}-9 = -6+6i\sqrt{3}$$

$$\Delta = (3\sqrt{3}+i)^2-4(2)(4)$$
$$= 27+6i\sqrt{3}-1-32$$
$$= -6+6i\sqrt{3}$$
$$= (\sqrt{3}+3i)^2$$ حسب السؤال الأول

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(3\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+3i)}{4} = \dfrac{-4\sqrt{3}-4i}{4} = -\sqrt{3}-i \\ z_2 = \dfrac{-(3\sqrt{3}+i)+(\sqrt{3}+3i)}{4} = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

التمرين – 54

1 – عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $3+4i$

2 – حل في C المعادلة $z^2-2(1+2i)z+9+20i=0$

الحل – 54

1 – ليكن $(\alpha+\beta i)^2 = 3+4i$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{3+|3+4i|}{2}} \\ \beta = \dfrac{4}{2\alpha} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{3+5}{2}} \\ \beta = \dfrac{4}{2\alpha} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases}$

نتيجة : $(2+i)^2 = 3+4i$

منه : الجذران التربيعيان لـ $3+4i$ هما $\{-2-i\,;\,2+i\}$

2 – حل المعادلة :

$$\Delta = 4(1+2i)^2-4(9+20i)$$
$$= 4+16i-16-36-80i$$
$$= -48-64i$$
$$= -16(3+4i)$$
$$= [4i(2+i)]^2$$
$$= (8i-4)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1+2i)-(8i-4)}{2} = \dfrac{6-4i}{2} = 3-2i \\ z_2 = \dfrac{2(1+2i)+(8i-4)}{2} = \dfrac{-2+12i}{2} = -1+6i \end{cases}$$

التمرين – 55

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيين $(x\,;\,y)$ النقطة M' ذات الإحداثيين $(x'\,;\,y')$

حيث : $\begin{cases} x' = -3x+2y+1 \\ y' = 5x-3y \end{cases}$

1 – عين إحداثيات A' صورة النقطة $A(-1\,;\,1)$ بالتحويل T

2 – عين إحداثيات B سابقة النقطة $B'(-2\,;\,3)$ بالتحويل T

3 – عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T

الحـل ــ 55

1 ــ لتكن $A'(x' ; y')$ إذن : $\begin{cases} x' = -3(-1) + 2(1) + 1 = 6 \\ y' = 5(-1) - 3(1) = -8 \end{cases}$

منه : $A'(6 ; -8)$

2 ــ لتكن $B(x ; y)$ إذن : $\begin{cases} -2 = -3x + 2y + 1 \\ 3 = 5x - 3y \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -3x + 2y + 3 = 0 \\ 5x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$

نحل جملة المعادلتين كما يلي :

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1$$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا : $\begin{cases} x = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \\ y = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 9 = -6 \end{cases}$

نتيجة : $B(-3 ; -6)$

3 ــ لتكن $w(x ; y)$ نقطة من المستوي .

$w(x ; y)$ صامدة بـ T يكافئ $T(w) = w$

يكافئ $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -3x + 2y + 1 = x \\ 5x - 3y = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -4x + 2y + 1 = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$ جملة معادلتين ذات مجهولين حقيقيين

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 10 = 6$$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا . $\begin{cases} x = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = — \end{cases}$

نتيجة : توجد نقطة صامدة وحيدة بالتحويل T و هي $w\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{6}\right)$

تحقيق : لتكن $w'(x' ; y')$ صورة $w\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{6}\right)$

إذن : $\begin{cases} x' = -3\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 1 = \frac{-6 + 5 + 3}{3} = \frac{2}{3} \\ y' = 5\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \end{cases}$

التمرين ــ 56

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة $M(x ;y)$ النقطة $M'(x' ; y')$ حيث $\begin{cases} x' = -3x + 4y - 12 \\ y' = -\frac{3}{2}x + 2y - 4 \end{cases}$

1 ــ عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T

2 ــ أثبت أن إذا كانت M ليست صامدة فإن منتصف القطعة $[MM']$ ينتمي إلى مستقيم ثابت يطلب معادلته .

3 ــ أثبت أن M' تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب معادلته

الحـل ــ 56

1 ــ لتكن $w(x ; y)$ نقطة من المستوي .

w صامدة يكافئ $T(w) = w$

يكافئ $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$$\begin{cases} -3x+4y-12=x \\ -\frac{3}{2}x+2y-4=y \end{cases}$$ يكافئ

$$\begin{cases} -4x+4y-12=0 \\ -\frac{3}{2}x+y-4=0 \end{cases}$$ يكافئ

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ 3x-2y+8=0 \end{cases}$$ يكافئ (جملة معادلتين)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2+3=1$$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا :

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -8+6=-2 \\ y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9-8=1 \end{cases}$$

نتيجة : T يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $w(-2\,;1)$

2 ــ لتكن M نقطة من المستوي حيث M لا تنطبق على w

نسمي A منتصف القطعة $[MM']$

نضع $A(X\,;Y)$ إحداثيات النقطة A

إذن :
$$\begin{cases} X=\frac{x'+x}{2} \\ Y=\frac{y+y'}{2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} X=\frac{-3x+4y-12+x}{2} \\ Y=\frac{-\frac{3}{2}x+2y-4+y}{2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} X=\frac{-2x+4y-12}{2} \\ Y=\frac{\frac{1}{2}(-3x+6y-8)}{2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} X=-x+2y-6 \\ Y=\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}y-2 \end{cases}$$

منه : $3X-4Y=-3x+6y-18+3x-6y+8$

أي : $3X-4Y=-10$

أي : $3X-4Y+10=0$ (مستقل عن x و y)

نتيجة : إذا كانت M تختلف عن w فإن منتصف $[MM']$ ينتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $3x-4y+10=0$

3 ــ لتكن $M'(X\,;Y)$ إذن :
$$\begin{cases} X=-3x+4y-12 \\ Y=-\frac{3}{2}x+2y-4 \end{cases}$$

منه : $X-2Y=-3x+4y-12-2\left(\frac{-3}{2}x+2y-4\right)$

أي : $X-2Y=-3x+4y-12+3x-4y+8$

أي : $X-2Y=-4$

أي : $X-2Y+4=0$

نتيجة : النقطة M' تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $x-2y+4=0$

التمرين ـــ 57

ABC مثلث . E ، F ، G هي صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و I ، J ، K هي صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$

أثبت أن C هي منتصف القطعة [IG]

الحـل ـــ 57

لدينا : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$ إذن : E تنطبق على B

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$ إذن : $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC}$ إذن : J تنطبق على C

$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BC}$

نتائج : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$ إذن : الرباعي ICBA متوازي أضلاع .

أي الرباعي ICEA متوازي أضلاع لأن E تنطبق على B

منه : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IC}$

إذن : $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{0}$

منه : C هي منتصف [IG]

التمرين ـــ 58

أكتب معادلة (Δ') صورة المستقيم (Δ) ذو المعادلة $3x + 2y - 5 = 0$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

الحـل ـــ 58

لنبحث عن عبارة الانسحاب ذو الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

لتكن $M(x ; y)$ و $M'(x' ; y')$ نقطتين من المستوي .

'M صورة M يكافئ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

يكافئ $\begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = -3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ و هي عبارة الانسحاب

نبحث الآن عن عبارتي x و y بدلالة 'x و 'y

$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

نتيجة : إذا كانت $M(x ; y)$ نقطة من (Δ) فإن $3x + 2y - 5 = 0$

أي $3(x' - 2) + 2(y' + 3) - 5 = 0$

أي $3x' - 6 + 2y' + 6 - 5 = 0$

أي $3x' + 2y' - 5 = 0$

منه : معادلة (Δ') هي : $3x + 2y - 5 = 0$

أي : (Δ') ينطبق على (Δ)

التمرين ـــ 59

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة $M(x ; y)$ النقطة $M'(x' ; y')$. في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة التحويل T و عناصره الهندسية المميزة

1 ـــ $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ **2 ـــ** $\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 4 \end{cases}$

الحــل – 59

للبحث عن طبيعة التحويلين نبحث عن شكلهما المركب كمايلي :

نضع $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$ ثم نبحث عن عبارة z' بدلالة z

1 – $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ منه $x' + i\,y' = (x - 4) + i(y + 2)$

أي $x' + i\,y' = x + i\,y - 4 + 2\,i$

أي $z' = z - 4 + 2\,i$

نتيجة : التحويل T من الشكل $z' = z + \beta$ حيث $\beta = -4 + 2\,i$

إذن : T هو انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 – $\begin{cases} x' = -2\,x - 3 \\ y' = -2\,y + 4 \end{cases}$ منه $x' + i\,y' = -2\,x - 3 + i(-2\,y + 4)$

أي $x' + i\,y' = -2\,x - 2\,i\,y - 3 + 4\,i$

أي $x' + i\,y' = -2(x + i\,y) - 3 + 4\,i$

أي $z' = -2\,z - 3 + 4\,i$

نتيجة : التحويل T من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$ حيث $\alpha \in R^* - \{1\}$

إذن : T هو تحاكي نسبته (-2) و مركزه النقطة w ذات اللاحقة $\dfrac{3 - 4\,i}{-2 - 1}$

أي $w\left(-1\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$

التمرين – 60

أكتب العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

الحــل – 60

عبارة الانسحاب الذي شعاعه هو صورة العدد المركب β هي : $z' = z + \beta$

إذن : $\beta = -1 + 2\,i$ لأن $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

منه : $z' = z - 1 + 2\,i$ هي عبارة الانسحاب

التمرين – 61

أكتب العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 3

الحــل – 61

عبارة التحاكي ذات النسبة 3 هي : $z = 3\,z + \beta$ حيث المركز هو النقطة ذات اللاحقة $\dfrac{-\beta}{3 - 1}$

منه : $\dfrac{-\beta}{3 - 1} = 0$ أي $\beta = 0$ لأن الركز هو $O(0\,;\,0)$

نتيجة : عبارة التحاكي هي $z' = 3\,z$

التمرين – 62

w نقطة لاحقتها $1 - i$

عين العبارة المركبة للتحاكي H الذي نسبته $-\dfrac{1}{2}$ و مركزه w

الحــل – 62

H تحاكي نسبته $-\dfrac{1}{2}$ إذن عبارة H هي $z' = -\dfrac{1}{2}\,z + \beta$ حيث $\beta \in C$

و $\dfrac{-\beta}{-\dfrac{1}{2} - 1}$ هي لاحقة المركز w

إذن : $1 - i = \dfrac{-\beta}{-\dfrac{1}{2} - 1}$

أي $1 - i = \dfrac{2\,\beta}{3}$

منه : $\beta = \dfrac{3(1 - i)}{2}$

أي $\beta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\,i$

نتيجة : عبارة التحاكي H هي $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

التمرين ــ 63

أكتب العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه مبدأ المعلم و زاويته $\frac{\pi}{6}$

الحــل ــ 63

زاوية الدوران R هي $\frac{\pi}{6}$ إذن عبارته : $z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z + \beta$ حيث

$\frac{-\beta}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - 1}$ هي لاحقة المركز

منه : $\frac{-\beta}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - 1} = 0$ أي $\beta = 0$

إذن : عبارة الدوران R هي : $z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$

أي $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$

التمرين ــ 64

t تحويل نقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$

في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة التحويل t و عناصره الهندسية المميزة .

1 ــ $\alpha = 1$ ؛ $\beta = 3 + i$　　**3 ــ $\alpha = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\beta = 0$**

2 ــ $\alpha = i$ ؛ $\beta = 1 - i$　　**4 ــ $\alpha = \frac{5}{2}$ ؛ $\beta = \frac{2i}{5}$**

الحــل ــ 64

1 ــ $\alpha = 1$ إذن : t هو الانسحاب الذي شعاعه صورة العدد β

أي : t انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

2 ــ $\alpha = i$ إذن : $|\alpha| = 1$

منه : t دوران مركزه w ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و الزاوية $\theta = Arg(\alpha)$

لدينا $1 = \frac{i - 1}{i - 1} = \frac{-\beta}{\alpha - 1}$ إذن : مركز الدوران هو $w(1 ; 0)$

$\alpha = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ إذن : زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$

3 ــ $\alpha = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

منه $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}|1 - i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 + 1} = 1$

إذن : t هو دوران مركزه النقطة w ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و زاويته $\theta = Arg(\alpha)$

لدينا : $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = 0$ إذن : المركز هو المبدأ $O(0 ; 0)$

$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ إذن : زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{4}$

4 ــ $\alpha = 5/2$ إذن : $\alpha \in R^* - \{1\}$

إذن : t هو تحاكي نسبته 5/2 و مركزه W ذات اللاحقة

$\frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{-\frac{2}{5}i}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}i = \frac{-4}{15}i$ إذن : المركز هو $w(0 ; -4/15)$

التمرين ــ 65

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $z_1 = 3 + i$ ؛ $z_2 = -2 + 3i$ ؛ $z_3 = 8 - i$

1 ــ عين نسبة التحاكي h ذو المركز C و الذي يحول A إلى B

2 ــ المستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل نقطي معين نقول عنه أنه صامد إجماليا بهذا التحويل . برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C و معامل توجيهه 2 صامد إجماليا بالتحويل h ثم أكتب معادلة له .

الحــل ــ 65

1 ــ لتكن α نسبة التحاكي h حيث $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

$h(A) = B$ يكافئ $\overrightarrow{CB} = \alpha\,\overrightarrow{CA}$

يكافئ $z_2 - z_3 = \alpha(z_1 - z_3)$

يكافئ $\alpha = \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$

يكافئ $\alpha = \dfrac{-2 + 3i - (8 - i)}{3 + i - (8 - i)}$

يكافئ $\alpha = \dfrac{-10 + 4i}{-5 + 2i}$

يكافئ $\alpha = \dfrac{2(-5 + 2i)}{-5 + 2i}$

يكافئ $\alpha = 2$

إذن : نسبة التحاكي h هي 2

2 ــ ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C و معامل توجيهه 2

إذا كانت M نقطة من (Δ) و M' صورة M بالتحويل h فإن : $\overrightarrow{CM'} = 2\,\overrightarrow{CM}$

إذن : النقط C ، M و M' على استقامة واحدة

منه : M' تنتمي إلى (Δ)

إذن : صورة (Δ) بالتحويل h تنطبق على (Δ)

نتيجة : المستقيم (Δ) صامد إجماليا بالتحويل h

معادلة (Δ) : معامل توجيه (Δ) هو 2 إذن : معادلة (Δ) : $y = 2x + b$ حيث $b \in \mathbb{R}$

بما أن C تنتمي إلى (Δ) فإن : $-1 = 2(8) + b$

أي : $b = -17$

نتيجة : (Δ) له المعادلة $y = 2x - 17$

التمرين ــ 66

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_1 = \dfrac{1}{2}(1 - i)$ ؛ $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم و يحول A إلى B

الحــل ــ 66

O هو مركز الدوران . و لتكن θ زاويته .

صورة A هي B إذن : $\theta = (\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB})$

أي : $\theta = \text{Arg}(z_B - z_O) - \text{Arg}(z_A - z_O)$

لدينا
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} = \text{Arg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) \\ -\dfrac{\pi}{4} = \text{Arg}\left(\dfrac{1}{2}(1 - i)\right) \end{array}\right\}$$

أي $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

أي $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

نتيجة : زاوية الدوران هي $\dfrac{3\pi}{4}$

التمرين ــ 67

t تحويل نقطي للمستوي معرف بـــ $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x - 2 \end{cases}$

نضع $z = x + i\,y$ **و** $z' = x' + i\,y'$

1 ــ أكتب z' **بدلالة** z

2 ــ ماهي الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل t ؟

الحــل ــ 67

1 ــ
$$\begin{aligned} x' + i\,y' &= 1 - y + i(x-2) \\ &= 1 - y + i\,x - 2\,i \\ &= i(x + i\,y) + 1 - 2\,i \end{aligned}$$

إذن : $z' = i\,z + 1 - 2\,i$

2 ــ **نتيجة** : التحويل t من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = i \\ \beta = 1 - 2\,i \end{cases}$

$|\alpha| = |i| = 1$ إذن : t دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $\dfrac{-\beta}{\alpha - 1}$ و زاويته $\theta = \text{Arg}(\alpha)$

المركز : $\dfrac{-(1-2\,i)}{i-1} = \dfrac{-(1-2\,i)}{i-1} \times \dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{1+i-2\,i+2}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$

إذن : مركز الدوران هو $w\left(\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$

$\theta = \text{Arg}(i) = \dfrac{\pi}{2}$ إذن زاوية الدوران هي $\dfrac{\pi}{2}$

التمرين ــ 68

t تحويل نقطي للمستوي حيث $\begin{cases} x' = 2\,x - \dfrac{3}{2} \\ y' = 2\,y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

أكتب العبارة المركبة للتحويل t ثم إستنتج طبيعته و عناصره المميزة .

الحــل ــ 68

ليكن $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

$$\begin{aligned} x' + i\,y' &= 2\,x - \frac{3}{2} + i\left(2\,y + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\,x - \frac{3}{2} + 2\,y\,i + \frac{1}{2}i \\ &= 2(x + i\,y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

منه : $z' = 2\,z - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$

نتيجة : t هو تحاكي نسبته 2 و مركزه النقطة w ذات اللاحقة

$\dfrac{-\left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)}{2-1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$ إذن : المركز هو $w\left(\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$

التمرين ــ 69

حل في C^2 **الجملة** $\begin{cases} 3\,z + t = 2 - 5\,i \\ z - t = -2 + i \end{cases}$ **ذات المجهولين z و t**

الحــل ــ 69

الجملة تكافئ $\begin{cases} 3\,z + t + z - t = 2 - 5\,i - 2 + i \\ t = z + 2 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 4\,z = -4\,i \\ t = z + 2 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = -i \\ t = -i + 2 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = -i \\ t = 2 - 2i \end{cases}$

التمرين ــ 70

حل في C^2 الجملة $\begin{cases} 2iz + t = 2i \\ 3z - it = 1 \end{cases}$ ذات المجهولين z و t

الحــل ــ 70

يمكن استعمال طريقة المحدد كمايلي :

$$\begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 3 & -i \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

إذن الجملة تقبل حلا وحيدا $(z\,;t)$ حيث :

$$\begin{cases} z = -\begin{vmatrix} 1 & -2i \\ -i & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = -1 \\ t = -\begin{vmatrix} -2i & 2i \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6i + 2i) = 4i \end{cases}$$

تحقيق : $\begin{cases} 2i(-1) + 4i = 2i \\ 3(-1) - i(4i) = -3 + 4 = 1 \end{cases}$

ملاحظة : يمكن حل هذه الجملة باستعمال طريقة الجمع و التعويض .

التمرين ــ 71

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = 1$

الحــل ــ 71

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{1+2i-1}{1+1}$$
$$= i$$
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

إذن : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{4n}$

$$= \cos 4n\frac{\pi}{2} + i\sin 4n\frac{\pi}{2}$$
$$= \cos 2\pi n + i\sin 2\pi n$$
$$= 1$$

التمرين ــ 72

برر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

الحــل ــ 72

1 ــ $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

إذن : $(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8$

$$= (\sqrt{2})^8 \times \left[\cos 8\times\frac{\pi}{4} + i\sin 8\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= 16[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$$
$$= 16$$

إذن : $(1+i)^8$ عدد حقيقي .

2 ــ $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

إذن : $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$

$$= \cos\left(-2008\,\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-2008\,\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos(-502\,\pi) + i\sin(-502\,\pi)$$
$= 1$ إذن : $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

التمرين ـــ 73

في كل من الحالات التالية عين الطبيعة الهندسية لمجموعة النقط $M(x\,;\,y)$ من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق المساواة :

1 ـــ $Re(z) = -3$ ـــ 3 ـــ $Re(z) = Im(z)$

2 ـــ $Im(z) = 2$ ـــ 4 ـــ $[Re(z+1)]^2 - Im(z-2) = 0$

الحـل ـــ 73

لدينا $z = x + i\,y$ إذن : $\begin{cases} z+1 = (x+1) + i\,y \\ z-2 = (x-2) + i\,y \end{cases}$

1 ـــ $Re(z) = -3$ يكافئ $x = -3$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $x = -3$

2 ـــ $Im(z) = 2$ يكافئ $y = 2$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y = 2$

3 ـــ $Re(z) = Im(z)$ يكافئ $x = y$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $x = y$ (المنصف الأول)

4 ـــ $[Re(z+1)]^2 - Im(z-2) = 0$ يكافئ $(x+1)^2 - y = 0$

يكافئ $y = (x+1)^2$

إذن : مجموعة النقط M هي منحنى الدالة f المعرفة على R

بـ $f(x) = (x+1)^2$

التمرين ـــ 74

C ، B ، A ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ، z ، z^2

عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حتى تكون النقط A ؛ B ؛ C على إستقامة واحدة .

الحـل ـــ 74

ليكن $z = x + i\,y$

إذن : $z^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

منه : $A(1\,;\,0)$ ؛ $B(x\,;y)$ ؛ $C(x^2 - y^2\,;\,2\,x\,y)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x^2-y^2-1 \\ 2\,x\,y \end{pmatrix}$

نتيجة : A ، B ، C على إستقامة واحدة يكافئ $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AC}$

يكافئ $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-y^2-1 \\ y & 2\,x\,y \end{vmatrix} = 0$

يكافئ $2\,x\,y(x-1) = y(x^2 - y^2 - 1)$

مناقشة : إذا كان $y = 0$ فإن المساواة $2\,x\,y(x-1) = y(x^2-y^2-1)$ دائما محققة إذن : محور الفواصل هو جزء من مجموعة النقط المطلوبة

إذا كان $y \neq 0$ المساواة تصبح : $2\,x(x-1) = x^2 - y^2 - 1$

أي : $2\,x^2 - 2\,x = x^2 - y^2 - 1$

أي : $y^2 = x^2 - 1 - 2\,x^2 + 2\,x$

أي : $y^2 = -x^2 + 2\,x - 1$

أي : $y^2 = -(x^2 - 2\,x + 1)$

أي : $y^2 = -(x-1)^2$

أي : $x = 1$ و $y = 0$

خلاصة : مجموعة النقط M التي تحقق أن A ، B ، C على إستقامة واحدة هي محور الفواصل فقط .

التمرين ـــ 75

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 + (-1-5\,i)\,z^2 + (-7-4\,i)\,z - 2 + 12\,i$

أثبت أن p يقبل جذرا حقيقيا يطلب تعيينه

الحـل – 75

ليكن $\alpha \in R$

α جذر لـ p يكافئ $p(\alpha) = 0$

يكافئ $\alpha^3 + (-1 - 5i)\alpha^2 + (-7 - 4i)\alpha - 2 + 12i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - \alpha^2 - 5i\alpha^2 - 7\alpha - 4i\alpha - 2 + 12i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - \alpha^2 - 7\alpha - 2 + i(-5\alpha^2 - 4\alpha + 12) = 0$

يكافئ $\begin{cases} (1) \ldots\ldots\ \alpha^3 - \alpha^2 - 7\alpha - 2 = 0 \\ (2) \ldots\ldots -5\alpha^2 - 4\alpha + 12 = 0 \end{cases}$

لنحل المعادلة (2) : $\Delta = 16 + 240 = 256 = (16)^2$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{4-16}{-10} = \dfrac{-12}{-10} = \dfrac{6}{5} \\ \alpha_2 = \dfrac{4+16}{-10} = \dfrac{20}{-10} = -2 \end{cases}$$

هل $\alpha = 6/5$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 7\left(\frac{6}{5}\right) - 2 = \frac{216 - 180 - 1050 - 250}{125} = \frac{-1264}{125}$$

إذن : $\alpha = 6/5$ لا يحقق المعادلة (1) (مرفوض)

هل $\alpha = -2$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$(-2)^3 - (-2)^2 - 7(-2) - 2 = -8 - 4 + 14 - 2 = 0$$

إذن : $\alpha = -2$ يحقق المعادلة (1)

نتيجة : العدد $\alpha = -2$ هو الجذر الحقيقي الوحيد لكثير الحدود p

التمرين – 76

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $3i$ ؛ $-3i$ ؛ $2 - 3i$

1 – عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -2)\}$

2 – عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$

الحـل – 76

1 – لاحقة النقطة G هي $\dfrac{1(3i) + 2(-3i) - 2(2 - 3i)}{1 + 2 - 2} = 3i - 6i - 4 + 6i = -4 + 3i$

2 – $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$ تكافئ $(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 + 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM})^2 - 2(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM})^2 = 25$

(أنظر الملاحظة) تكافئ $AG^2 + 2BG^2 - 2CG^2 + GM^2 + 2GM^2 - 2GM^2 = 25$

تكافئ $GM^2 = 25 - AG^2 - 2BG^2 + 2CG^2$

يكافئ $GM^2 = 25 - |-4 + 3i - 3i|^2 - 2|-4 + 3i + 3i|^2 + 2|-4 + 3i - 2 + 3i|^2$

يكافئ $GM^2 = 25 - |-4|^2 - 2|-4 + 6i|^2 + 2|-6 + 6i|^2$

يكافئ $GM^2 = 25 - 16 - 2(52) + 2(72)$

يكافئ $GM^2 = 49$

يكافئ $GM = 7$

إذن : مجموعة النقط M هي النقط التي تبعد عن G بمسافة 7 أي هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 7

ملاحظة : $2\,\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GM} + 4\,\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GM} - 4\,\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{GM} = 2\,\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{AG} + 2\,\overrightarrow{BG} - 2\,\overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{0}$

لأن : G هو مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -2)\}$

التمرين –77

نرفق بكل نقطة $M(x ; y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x' ; y')$ ذات اللاحقة z' حيث $z' = z^2 - 2(1 + i)z$

1 – عبر عن x' و y' بدلالة x و y

2 – لتكن (γ) مجموعة النقط M حيث z' عدد حقيقي

برهن أن (γ) هو منحنى لدالة عددية f يطلب عبارتها

الحــل ــ 77

1 ــ $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

$$z^2 - 2(1+i)\,z = (x+i\,y)^2 - 2(1+i)(x+i\,y)$$
$$= x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i - 2(x + i\,y + i\,x - y)$$
$$= x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i - 2\,x + 2\,y - 2\,i\,x - 2\,i\,y$$
$$= x^2 - y^2 - 2\,x + 2\,y + i(2\,x\,y - 2\,x - 2\,y)$$

نتيجة : $z' = x^2 - y^2 - 2\,x + 2\,y + i(2\,x\,y - 2\,x - 2\,y)$

إذن : $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 2\,x + 2\,y \\ y' = 2\,x\,y - 2\,x - 2\,y \end{cases}$

2 ــ z' حقيقي يكافئ $y' = 0$

يكافئ $2\,x\,y - 2\,x - 2\,y = 0$

يكافئ $x\,y - x - y = 0$

يكافئ $y(x-1) - x = 0$

يكافئ $y(x-1) = x$

يكافئ $y = \dfrac{x}{x-1}$ مع $x \neq 1$

نتيجة : (γ) هو منحنى الدالة f المعرفة على $R - \{1\}$ بــ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

التمرين ــ 78

z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

نضع $\alpha = z - 2\,\overline{z} + 2 + 3\,i$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z

1 ــ أحسب بدلالة x و y الجزء التخيلي و الجزء الحقيقي لــ α

2 ــ حل في C المعادلة $\alpha = 0$ ذات المجهول z

الحــل ــ 78

1 ــ
$$\alpha = z - 2\,\overline{z} + 2 + 3\,i$$
$$= x + i\,y - 2(x - i\,y) + 2 + 3\,i$$
$$= x + i\,y - 2\,x + 2\,i\,y + 2 + 3\,i$$
$$= 2 - x + i(3\,y + 3)$$

منه : $\mathrm{Re}(\alpha) = 2 - x$ و $\mathrm{Im}(\alpha) = 3\,y + 3$

2 ــ $\alpha = 0$ يكافئ $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ و $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$

يكافئ $2 - x = 0$ و $3\,y + 3 = 0$

يكافئ $x = 2$ و $y = -1$

يكافئ $z = 2 - i$

إذن : المعادلة $\alpha = 0$ تقبل حلا وحيدا هو $z = 2 - i$.

التمرين ــ 79

z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

نضع $\alpha = i\,z + \overline{z} - 3 - 2\,i$

1 ــ أحسب $\alpha - \overline{\alpha}$ بدلالة x و y

2 ــ برهن أن : النقطة ذات اللاحقة α تنتمي إلى محور الفواصل تكافئ النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$

الحــل ــ 79

1 ــ
$$\alpha = i(x + i\,y) + x - i\,y - 3 - 2\,i$$
$$= i\,x - y + x - i\,y - 3 - 2\,i$$
$$= (x - y - 3) + i(x - y - 2)$$

إذن : $\overline{\alpha} = (x - y - 3) - i(x - y - 2)$

منه : $\alpha - \overline{\alpha} = 2\,i(x - y - 2)$

2 ــ النقطة ذات اللاحقة α تنتمي إلى محور الفواصل يكافئ $\alpha \in R$

يكافئ $\alpha = \overline{\alpha}$

يكافئ $\alpha - \overline{\alpha} = 0$

يكافئ $2i(x - y - 2) = 0$

يكافئ $x - y - 2 = 0$

يكافئ $y = x - 2$

يكافئ النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$

التمرين – 80

z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + iy$

نضع $\alpha = 2\overline{z} - 2 + 6i$

1 – أكتب α على شكله الجبري .

2 – هل يوجد عدد مركب z يحقق $\alpha = z$ ؟

الحـل – 80

1 –
$$\alpha = 2(x - iy) - 2 + 6i$$
$$= 2x - 2iy - 2 + 6i$$
شكل جبري لـ α $= (2x - 2) + i(6 - 2y)$

2 – $\alpha = z$ يكافئ $(2x - 2) + i(6 - 2y) = x + iy$

يكافئ $\begin{cases} 2x - 2 = x \\ 6 - 2y = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

يكافئ $z = 2 + 2i$

إذن : المعادلة $\alpha = z$ تقبل حلا وحيدا هو $z = 2 + 2i$

التمرين – 81

في المستوي المركب M نقطة لاحقتها العدد المركب z حيث $z = x + iy$ (x ، y عددان حقيقيان)

نرفق بكل عدد مركب z حيث $z \neq 1$ العدد المركب L المعرف بـ $L = \dfrac{5z - 2}{z - 1}$

1 – أكتب $L + \overline{L}$ بدلالة z و $\overline{z}$

2 – برهن أن : L عدد تخيلي صرف يكافئ M نقطة من دائرة باستثناء نقطة

الحـل – 81

1 –
$$L + \overline{L} = \frac{5z - 2}{z - 1} + \frac{5\overline{z} - 2}{\overline{z} - 1}$$
$$= \frac{5z\overline{z} - 5z - 2\overline{z} + 2 + 5z\overline{z} - 5\overline{z} - 2z + 2}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1}$$
$$= \frac{10z\overline{z} - 7z - 7\overline{z} + 4}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1}$$

نتيجة :
$$L + \overline{L} = \frac{10z\overline{z} - 7(z + \overline{z}) + 4}{z\overline{z} - (z + \overline{z}) + 1}$$

2 – L عدد تخيلي صرف يكافئ $L = -\overline{L}$

يكافئ $L + \overline{L} = 0$

يكافئ $\dfrac{10z\overline{z} - 7(z + \overline{z}) + 4}{z\overline{z} - (z + \overline{z}) + 1} = 0$

يكافئ $\begin{cases} 10z\overline{z} - 7(z + \overline{z}) + 4 = 0 \\ z \neq 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 10(x^2 + y^2) - 7(2x) + 4 = 0 \\ (x ; y) \neq (1 ; 0) \end{cases}$ لأن $z\overline{z} = |z|^2$ و $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{10}x + \frac{4}{10} = 0 \quad (x ; y) \neq (1 ; 0)$$ يكافئ

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \quad (x ; y) \neq (1 ; 0)$$ يكافئ

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + y^2 + \frac{2}{5} = 0 \quad (x ; y) \neq (1 ; 0)$$ يكافئ

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100} \quad (x ; y) \neq (1 ; 0)$$ يكافئ

يكافئ M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $w(7/10 ; 0)$ و نصف القطر $R = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$

باستثناء النقطة $A(1 ; 0)$ لأن $z \neq 1$

التمرين ــ 82

حل في C المعادلة $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$

الحـل ــ 82

ليكن $z = x + iy$ على شكله الجبري

$z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ يكافئ $x + iy = 2(x - iy) - 2 + 6i$

يكافئ $x + iy = 2x - 2iy - 2 + 6i$

يكافئ $x + iy - 2x + 2iy + 2 - 6i = 0$

يكافئ $(-x + 2) + i(3y - 6) = 0$

يكافئ $\begin{cases} -x + 2 = 0 \\ 3y - 6 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

يكافئ $z = 2 + 2i$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

التمرين ــ 83

حل في C المعادلات التالية :

1 ــ $|z|^2 + \bar{z}^2 = 8 - 4i$

2 ــ $z\bar{z} - 5\bar{z} - 5(1 + 3i) = 0$

الحـل ــ 83

ليكن $z = x + iy$ على شكله الجبري

إذن : $|z|^2 = x^2 + y^2$ و $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

1 ــ $|z|^2 + \bar{z}^2 = 8 - 4i$ يكافئ $x^2 + y^2 + (x - iy)^2 = 8 - 4i$

يكافئ $x^2 + y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 = 8 - 4i$

يكافئ $2x^2 - 2xyi = 8 - 4i$

يكافئ $\begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \frac{4}{2x} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = -2 \text{ أو } x = 2 \\ y = 2/x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 2 \text{ و } y = 1 \\ \text{أو} \\ x = -2 \text{ و } y = -1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = 2 + i \\ \text{أو} \\ z = -2 - i \end{cases}$

نتيجة : المعادلة تقبل حلين هما : $\{2 + i \; ; -2 - i\}$

2 ـــ $z\bar{z} - 5\bar{z} - 5(1 + 3i) = 0$ يكافئ $x^2 + y^2 - 5(x - iy) = 5(1 + 3i)$

يكافئ $x^2 + y^2 - 5x + 5iy = 5 + 15i$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x = 5 \\ 5y = 15 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + 9 - 5x - 5 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} (x - 4)(x - 1) = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x \in \{1 ; 4\} \\ y = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 1 \text{ و } y = 3 \\ \text{أو} \\ x = 4 \text{ و } y = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = 1 + 3i \\ \text{أو} \\ z = 4 + 3i \end{cases}$

نتيجة : المعادلة تقبل حلين هما : $\{1 + 3i \; ; 4 + 3i\}$

التمرين ـــ 84

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 - (2 - 3i)z^2 + 9z - 18 + 27i$

1 ـــ أكتب $\overline{p(z)}$ بدلالة $\bar{z}$

2 ـــ عين العدد المركب α الذي يحقق $p(\alpha) = 0$ و $p(\bar{\alpha}) = 0$ ثم إستنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$ في C

الحـل ـــ 84

1 ـــ $\overline{p(z)} = \bar{z}^3 - \overline{(2 - 3i)}\,\bar{z}^2 + 9\bar{z} - 18 + \overline{27i}$

$= \bar{z}^3 - (2 + 3i)\bar{z}^2 + 9\bar{z} - 18 - 27i$

2 ـــ ليكن α عدد مركب .

$\begin{cases} p(\alpha) = 0 \\ p(\bar{\alpha}) = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} (1) \ldots\ldots \alpha^3 - (2 - 3i)\alpha^2 + 9\alpha - 18 + 27i = 0 \\ (2) \ldots\ldots \bar{\alpha}^3 - (2 - 3i)\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 18 + 27i = 0 \end{cases}$

لكن إذا كان $p(\alpha) = 0$ فإن $\overline{p(\alpha)} = 0$

إذن : $(3) \ldots\ldots\ldots \bar{\alpha}^3 - (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 18 - 27i = 0$

بطرح (3) من (2) نحصل على : $-(2 - 3i)\bar{\alpha}^2 + 27i + (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 27i = 0$

أي : $\bar{\alpha}^2(-2 + 3i + 2 + 3i) + 54i = 0$

أي : $\bar{\alpha}^2(6i) + 54i = 0$

أي : $\bar{\alpha}^2 = \dfrac{-54i}{6i}$

أي : $\overline{\alpha}^2 = -9$

أي : $\overline{\alpha} = 3i$ أو $\overline{\alpha} = -3i$

أي : $\alpha = -3i$ أو $\alpha = 3i$

هل $\alpha = 3i$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$(3i)^3 - (2-3i)(3i)^2 + 9(3i) - 18 + 27i = -27i + 18 - 27i + 27i - 18 + 27i = 0$$

إذن : $\alpha = 3i$ يحقق المعادلة (1)

هل $\alpha = -3i$ يحقق المعادلة (1)

$$(-3i)^3 - (2-3i)(-3i)^2 + 9(-3i) - 18 + 27i = 27i + 18 - 27i - 27i - 18 + 27i = 0$$

إذن : $\alpha = -3i$ يحقق المعادلة (1)

نتيجة : العدد المركب α الذي يحقق $p(\overline{\alpha}) = p(\alpha) = 0$ هو $\alpha = 3i$ أو $\alpha = -3i$

إستنتاج الحلول :

لدينا : $p(3i) = 0$ و $p(-3i) = 0$

إذن : $p(z)$ يحلل إلى : $(z-3i)(z+3i)(z-\beta)$ حيث $\beta \in C$

أي : $p(z) = (z-3i)(z+3i)(z-\beta)$

أي $p(z) = (z^2+9)(z-\beta)$

منه : $z - \beta = \dfrac{p(z)}{z^2+9}$

يمكن أن نبحث عن $(z-\beta)$ إما بالقسمة الاقليدية أو المطابقة .

نستعمل القسمة الاقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{l|l} z^3 - (2-3i)z^2 + 9z - 18 + 27i & z^2 + 9 \\ \underline{z^3 + \quad 0 \quad + 9z} & \overline{z - (2-3i)} \\ 0 - (2-3i)z^2 + 0 - 18 + 27i & \\ \underline{-(2-3i)z^2 \qquad - 18 + 27i} & \\ 0 \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

نتيجة : $p(z) = (z^2+9)[z-(2-3i)]$

إذن : $p(z) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z^2 + 9 = 0 \\ \text{أو} \\ z - (2-3i) = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = 3i \text{ أو } z = -3i \\ \text{أو } z = 2 - 3i \end{cases}$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي : $\{3i ; -3i ; 2-3i\}$

التمرين – 85

من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 نضع $T = \dfrac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$

نضع $z = x + iy$ و $T = X + iY$ الشكل المركب لـ z و T)

1 – أحسب كل من X و Y بدلالة x و y

2 – عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون T حقيقيا .

3 – عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون T تخيليا صرفا .

الحــل – 85

1 – ليكن $(x ; y) \neq (-1 ; 0)$

$$T = \frac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$$

$$= \frac{2+x-iy}{1+x-iy} \times \frac{1+x+iy}{1+x+iy}$$

$$= \frac{(2+x)(1+x) + (2+x)yi - (1+x)yi + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{2 + 2x + x + x^2 + y^2 + i\,y(2 + x - 1 - x)}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1+x)^2 + y^2} + \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}\,i$$

إذن : $X = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1+x)^2 + y^2}$ و $Y = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}$

2 ــ T حقيقي يكافئ $Y = 0$

يكافئ $\frac{y}{(1+x)^2 + y^2} = 0$

يكافئ $y = 0$

إذن : مجموعة النقط M حتى يكون T حقيقي هي المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ ماعدا النقطة $w(-1\,;0)$

3 ــ T تخيلي صرف يكافئ $X = 0$

يكافئ $\frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1+x)^2 + y^2} = 0$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0 \\ (x\,;y) \neq (-1\,;0) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 0 \\ (x\,;y) \neq (-1\,;0) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x\,;y) \neq (-1\,;0) \end{cases}$

إذن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $w\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$ و نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ماعدا النقطة ذات الاحداثيات $(-1\,;0)$

التمرين ــ 86

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $i\sqrt{2}$ ؛ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1 ــ عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A\,;-3)\,;(b\,;1+\sqrt{6})\,;C(1-\sqrt{6})\}$

2 ــ بين أن G هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

الحل ــ 86

1 ــ

$$z_G = \frac{-3\left(i\sqrt{2}\right) + \left(1+\sqrt{6}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(1-\sqrt{6}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-3 + 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i}{-1}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + 1 + i\sqrt{18}}{-1}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + 1 + 3i\sqrt{2}}{-1}$$

$$= -1$$

منه : احداثيات النقطة G هي $G(-1\,;0)$

2 ــ

$$\|\overrightarrow{GA}\| = \left|i\sqrt{2} - (-1)\right| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\|\overrightarrow{GB}\| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1)\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\|\overrightarrow{GC}\| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1)\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

إذن : A ، B ، C هي نقط من الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{3}$

منه : G هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين ــ 87

u و v عددان مركبان غير حقيقيان . نضع $z = \dfrac{u - \bar{u}\,v}{1 - v}$

برهن أن z حقيقي يكافئ $|v| = 1$

الحــل ــ 87

z حقيقي يكافئ $z = \bar{z}$

يكافئ $\overline{\left(\dfrac{u - \bar{u}\,v}{1 - v}\right)} = \dfrac{u - \bar{u}\,v}{1 - v}$

يكافئ $\dfrac{\bar{u} - u\,\bar{v}}{1 - \bar{v}} = \dfrac{u - \bar{u}\,v}{1 - v}$

يكافئ $(\bar{u} - u\,\bar{v})(1 - v) = (1 - \bar{v})(u - \bar{u}\,v)$

يكافئ $\bar{u} - \bar{u}\,v - u\,\bar{v} + u\,v\,\bar{v} = u - \bar{u}\,v - u\,\bar{v} + \bar{u}\,\bar{v}\,v$

يكافئ $\bar{u} + u\,v\,\bar{v} = u + \bar{u}\,\bar{v}\,v$

يكافئ $\bar{u} + u\,v\,\bar{v} - u - \bar{u}\,\bar{v}\,v = 0$

يكافئ $u(v\,\bar{v} - 1) - \bar{u}(v\,\bar{v} - 1) = 0$

يكافئ $(v\,\bar{v} - 1)(u - \bar{u}) = 0$

يكافئ $v\,\bar{v} - 1 = 0$ لأن $u - \bar{u} \neq 0$ (u ليس حقيقي)

يكافئ $|v|^2 - 1 = 0$ لأن $v\,\bar{v} = |v|^2$

يكافئ $|v|^2 = 1$

يكافئ $|v| = 1$

التمرين ــ 88

a و b عددان مركبان حيث $|a| = |b| = 1$ **و** $a\,b \neq -1$

نضع $z = \dfrac{a + b}{1 + a\,b}$

عبر عن $\bar{z}$ **بدلالة a و b ثم استنتج أن z حقيقي**

الحــل ــ 88

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{a + b}{1 + a\,b}\right)} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a}\,\bar{b}}$$

لكن $\left\{\begin{array}{l} a\,\bar{a} = |a|^2 = 1 \\ b\,\bar{b} = |b|^2 = 1 \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} \bar{a} = \dfrac{1}{a} \\ \bar{b} = \dfrac{1}{b} \end{array}\right.$

منه : $\bar{z} = \dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{1 + \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b}} = \dfrac{a + b}{a\,b} \times \dfrac{a\,b}{1 + a\,b} = \dfrac{a + b}{1 + a\,b}$

نتيجة : $\bar{z} = z$ إذن : $z \in \mathbb{R}$

التمرين ــ 89

α عدد مركب غير معدوم طريلته R و عمدته θ

نعتبر العددين المركبين $z = \alpha\,i$ ، $t = \alpha^2$

1 ــ أحسب بدلالة R و θ طويلة ثم عمدة كل من z و t

2 ــ حدد قيم R و θ حتى يكون z و t مترافقين .

الحــل ــ 89

1 ــ $z = \alpha\,i$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} |z| = |\alpha| \times |i| = R \\ \text{Arg}(z) = \text{Arg}(\alpha) + \text{Arg}(i) = \theta + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l}|t| = |\alpha|^2 = R^2 \\ Arg(t) = 2\,Arg(\alpha) = 2\,\theta\end{array}\right\}$: إذن $t = \alpha^2$

يكون z و t مترافقين إذا و فقط إذا كان $\left.\begin{array}{l}R^2 = R \\ 2\,\theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 2\,\pi\,k\end{array}\right\}$ حيث $k \in Z$

أي $\left.\begin{array}{l}R(R-1) = 0 \\ 2\,\theta = -\theta - \frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k\end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l}R - 1 = 0 \\ 3\,\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k\end{array}\right\}$ لأن $R \neq 0$ (α غير معدوم)

أي $\left.\begin{array}{l}R = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3}\,k\end{array}\right\}$ حيث $k \in Z$

إذن : قيم R و θ هي كمايلي : $R = 1$ و $\theta = \frac{-\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3}\,k$ حيث $k \in Z$

التمرين ـــ 90

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1 = 1$ ؛ $z_2 = 2\,i$ ؛ $z_3 = -1 - i$

1 ـــ أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$

2 ـــ أحسب $Arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$

3 ـــ إستنتج طبيعة المثلث ABC

الحــل ـــ 90

1 ـــ لدينا : $z_2 - z_1 = 2\,i - 1$ ؛ $z_3 - z_1 = -1 - i - 1 = -2 - i$

إذن : $|z_2 - z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ و $|z_3 - z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ـــ 2

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-1 + 2\,i}{-2 - i} \times \frac{-2 + i}{-2 + i}$$
$$= \frac{2 - i - 4\,i - 2}{4 + 1}$$
$$= -i$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

إذن : $Arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = -\frac{\pi}{2}$

ـــ 3 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$ إذن : $AB = AC$

$Arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = -\frac{\pi}{2}$ إذن : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

نتيجة : المثلث ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A

التمرين ـــ 91

في كل حالة من الحالات التالية أثبت أن العدد z حقيقي .

1 ـــ $z = (-2 - 2\,i)^{8n}$ **3 ـــ** $z = (3 - i\sqrt{3})^{12n}$

2 ـــ $z = (-1 + i\sqrt{3})^{3n}$

ملاحظة : n عدد طبيعي .

الحــل ـــ 91

ـــ 1

$$-2 - 2\,i = -2(1 + i)$$
$$= -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

منه : $(-2-2i)^{8n} = (-2\sqrt{2})^{8n} \times \left[\cos 8n\frac{\pi}{4} + i\sin 8n\frac{\pi}{4}\right]$

$= (2\sqrt{2})^{8n} \times [\cos 2\pi n + i\sin 2\pi n]$

$z \in R$: إذن $= (2\sqrt{2})^{8n}$

2 ــ $-1 + i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right]$

إذن : $(-1+i\sqrt{3})^{3n} = 2^{3n} \times \left[\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right]^{3n}$

$= 2^{3n}\left[\cos\left(2\frac{\pi}{3} \times 3n\right) + i\sin\left(2\frac{\tau}{3} \times 3n\right)\right]$

$= 8^n \times [\cos 2\pi n + i\sin 2\pi n]$

$z \in R$: إذن $= 8^n$

3 ــ $3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

إذن : $(3 - i\sqrt{3})^{12n} = (2\sqrt{3})^{12n} \times \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{12n}$

$= (2\sqrt{3})^{12n} \times \left[\cos\left(-\frac{12n\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{12n\pi}{6}\right)\right]$

$= (2\sqrt{3})^{12n} \times [\cos(-2\pi n) + i\sin(-2\pi n)]$

$z \in R$: إذن $= (2\sqrt{3})^{12n}$

التمرين ــ 92

z عدد مركب حيث $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $z^{6n+1} = z$

الحــل ــ 92

$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

منه : $z^{6n+1} = z \times z^{6n}$

$= z \times \left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{6n}$

$= z \times \left[\cos\frac{6\pi n}{3} + i\sin\frac{6\pi n}{3}\right]$

$= z(\cos 2\pi n + i\sin 2\pi n)$

$= z$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

لتكن في C المعادلة $z^2 - \alpha(\alpha + i) z + i\,\alpha^3 = 0$ ....(1) ذات المجهول z حيث α عدد مركب غير معدوم طويلته R و عمدته θ .

1 ــ حل في C المعادلة (1)

2 ــ أحسب طويلة و عمدة حلي المعادلة (1) بدلالة R و θ

3 ــ حدد قيم R و θ حتى يكون الحلان مترافقان .

الحــل ــ 1

1 ــ

$$\begin{aligned}\Delta &= \alpha^2(\alpha + i)^2 - 4\,i\,\alpha^3\\ &= \alpha^2(\alpha^2 + 2\,\alpha\,i - 1) - 4\,i\,\alpha^3\\ &= \alpha^4 + 2\,i\,\alpha^3 - \alpha^2 - 4\,i\,\alpha^3\\ &= \alpha^4 - 2\,i\,\alpha^3 - \alpha^2\\ &= \alpha^2(\alpha^2 - 2\,i\,\alpha - 1)\\ &= \alpha^2(\alpha - i)^2\\ &= [\alpha(\alpha - i)]^2\end{aligned}$$

منه حلول المعادلة (1) هي :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha(\alpha + i) - \alpha(\alpha - i)}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha + i - \alpha + i)}{2} = \dfrac{2\,i\,\alpha}{2} = i\,\alpha \\ z_2 = \dfrac{\alpha(\alpha + i) + \alpha(\alpha - i)}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha + i + \alpha - i)}{2} = \dfrac{2\,\alpha^2}{2} = \alpha^2 \end{cases}$$

2 ــ

$$\begin{cases} |z_1| = |\alpha| = R \\ \text{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} + \theta \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} |z_2| = |\alpha^2| = |\alpha|^2 = R^2 \\ \text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(\alpha^2) = 2\,\text{Arg}(\alpha) = 2\,\theta \end{cases}$$

3 ــ الحلان مترافقان يكافئ

$$\begin{cases} R^2 = R \\ 2\,\theta = -\dfrac{\pi}{2} - \theta + 2\,\pi\,k \end{cases} \quad k \in Z \text{ حيث}$$

يكافئ

$$\begin{cases} R(R - 1) = 0 \\ 3\,\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} R = 1 \quad \text{لأن } R \neq 0 \ (\alpha \text{ غير معدوم}) \\ \theta = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\,\pi}{3}k \quad \text{مع } k \in Z \end{cases}$$

التمرين ــ 2

لتكن في C المعادلة $\alpha\,z^2 + (1 - i\,\alpha^2)\,z - i\,\alpha = 0$ ......(1) ذات المجهول المركب z و α عدد مركب غير معدوم

1 ــ أنشر العبارة $(1 + i\,\alpha^2)^2$ ثم حل في C المعادلة (1)

2 ــ ليكن $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$. أحسب طويلة و عمدة حلي المعادلة (1)

الحــل ــ 2

1 ــ

$$(1 + i\,\alpha^2)^2 = 1 + 2\,i\,\alpha^2 - \alpha^4$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 - i\,\alpha^2)^2 + 4\,i\,\alpha^2\\ &= 1 - 2\,i\,\alpha^2 - \alpha^4 + 4\,i\,\alpha^2\end{aligned}$$

$$= 1 + 2i\alpha^2 - \alpha^4$$

حسب السؤال السابق $= (1 + i\alpha^2)^2$

إذن :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 + i\alpha^2 - 1 - i\alpha^2}{2\alpha} = \dfrac{-2}{2\alpha} = \dfrac{-1}{\alpha} \\ z_2 = \dfrac{-1 + i\alpha^2 + 1 + i\alpha^2}{2\alpha} = \dfrac{2i\alpha^2}{2\alpha} = i\alpha \end{cases}$$

2 –

$$\begin{cases} |z_1| = \left|\dfrac{-1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|} \\ Arg(z_1) = Arg\left(\dfrac{-1}{\alpha}\right) = Arg(-1) - Arg(\alpha) = \pi - Arg(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_2| = |i\alpha| = |\alpha| \\ Arg(z_2) = Arg(i) + Arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} + Arg(\alpha) \end{cases}$$

من أجل $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$ فإن :

$$\begin{cases} |\alpha| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3 + 1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right] = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right] \end{cases}$$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} |\alpha| = \sqrt{2} \\ Arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}\right\}$ منه $\left.\begin{matrix} |z_1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{و} & Arg(z_1) = \pi - \dfrac{\pi}{6} \\ |z_2| = \sqrt{2} & \text{و} & Arg(z_2) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}\right\}$

<u>التمرين – 3</u>

R عدد حقيقي موجب تماما . و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب غير معدوم طريلته R و عمدته θ

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2 - \alpha z + \alpha^2 = 0$ ذات المجهول z

2 – عبر بدلالة R و θ عن طويلة و عمدة كل من الحلين .

<u>الحل – 3</u>

1 –

$$\Delta = \alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2 = (i\alpha\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha - i\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}(1 - i\sqrt{3}) \\ z_2 = \dfrac{\alpha + i\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}(1 + i\sqrt{3}) \end{cases}$$

2 –

$$|z_1| = \left|\dfrac{\alpha}{2}\right| \times |1 - i\sqrt{3}| = \dfrac{R}{2}\sqrt{1 + 3} = R$$

$$|z_2| = \left|\dfrac{\alpha}{2}\right| \times |1 + i\sqrt{3}| = \dfrac{R}{2}\sqrt{1 + 3} = R$$

$$Arg(z_1) = Arg(\alpha) + Arg\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta + Arg\left(\cos\dfrac{-\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right) = \theta - \dfrac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_2) = Arg(\alpha) + Arg\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta + Arg\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \theta + \dfrac{\pi}{3}$$

<u>التمرين – 4</u>

θ عدد حقيقي .

لتكن المعادلة $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \dfrac{i}{2}\sin 2\theta = 0$ ....(1) ذات المجهول المركب z

1 – عين حلول المعادلة (1) بدلالة θ

2 – عين حلول المعادلة (1) من أجل $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

<u>الحل – 4</u>

1 –

$$\Delta = (1 + i\sin 2\theta)^2 - 4\left(\dfrac{i}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= 1 + 2\, i \sin 2\theta - \sin^2 2\theta - 2\, i \sin 2\theta$$
$$= 1 - \sin^2 2\theta$$
$$= \cos^2 2\theta$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1 + i \sin 2\theta - \cos 2\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} + \dfrac{i}{2} \sin 2\theta \\ z_2 = \dfrac{1 + i \sin 2\theta + \cos 2\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2} + \dfrac{i}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

2 ــ من أجل $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ لدينا : $\begin{cases} \cos 2\theta = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \sin 2\theta = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i \end{cases}$

<u>التمرين ــ 5</u>

حل في مجموعة الأعداد المركبة C كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ ......(1)

و $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$ ......(2)

لتكن النقط A ، B ، C ، D لواحقها على الترتيب $1 + 2i$ ، $1 + \sqrt{3} + i$ ، $1 - 2i$ و $1 + \sqrt{3} - i$

1 ــ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

2 ــ أكتب معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

3 ــ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C)

<u>الحـل ــ 5</u>

1 ــ $z^2 - 2z + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i \\ z_2 = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

$z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$: $\Delta = 4(1 + \sqrt{3})^2 - 4(5 + 2\sqrt{3})$

$$= 4 + 8\sqrt{3} + 12 - 20 - 8\sqrt{3}$$
$$= -4$$
$$= (2i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1 + \sqrt{3}) - 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} - i \\ z_2 = \dfrac{2(1 + \sqrt{3}) + 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} + i \end{cases}$$

2 ــ لنحسب AB^2 ، AC^2 ، BC^2 كمايلي :

$$AB^2 = |1 + \sqrt{3} + i - 1 - 2i|^2 = |\sqrt{3} - i|^2 = 3 + 1 = 4$$
$$AC^2 = |1 - 2i - 1 - 2i|^2 = |-4i|^2 = 16$$
$$BC^2 = |1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i|^2 = |-\sqrt{3} - 3i|^2 = 3 + 9 = 12$$

نتيجة : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ إذن : حسب فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B

3 ــ نعلم أن في المثلث القائم مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي منتصف الوتر في هذه الحالة هي منتصف $[AC]$

و نصف قطرها هو نصف طول الوتر أي $\dfrac{AC}{2}$ و في هذه الحالة $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

لنبحث إذن عن المركز : $\dfrac{1 + 2i + 1 - 2i}{2} = 1$

إذن : المركز هو $w(1 ; 0)$

منه : معادلة الدائرة (C) : $(x - 1)^2 + y^2 = (2)^2$

أي : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

4 ــ هل إحداثيات النقطة D تحقق معادلة الدائرة (C) ؟

لدينا $D(1 + \sqrt{3} ; -1)$

إذن : $(1 + \sqrt{3})^2 + (-1)^2 - 2(1 + \sqrt{3}) - 3 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2 - 2\sqrt{3} - 3$

$= 0$ إذن : فعلا D تنتمي إلى الدائرة (C)

<u>التمرين ــ 6</u>

θ عدد حقيقي

1 ــ حل في C المعادلة $z^2 - 2z\sin\theta + 1 = 0$ .... (1) ذات المجهول z

لتكن A و B لاحقتاهما حلول المعادلة (1) . و لتكن O مبدأ المعلم

2 ــ عين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع

<u>الحـل ــ 6</u>

1 ــ $\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = -4(1 - \sin^2\theta) = -4\cos^2\theta = (2i\cos\theta)^2$

$$z_1 = \frac{2\sin\theta - 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta - i\cos\theta$$

$$z_2 = \frac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$$

2 ــ يكون ABC مثلث متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $OA^2 = OB^2 = AB^2$

لتكن A ، B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 إذن :

$OA^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$OB^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$AB^2 = |z_2 - z_1|^2$

$= |2i\cos\theta|^2$

$= 4\cos^2\theta$

نتيجة : يكون ABC مثلث متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $AB = 1$

أي : $4\cos^2\theta = 1$

أي $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

أي $\cos\theta = \frac{1}{2}$ أو $\cos\theta = \frac{-1}{2}$

أي $\theta = \frac{\pi}{3} + \pi k$ أو $\theta = \frac{-\pi}{3} + \pi k$ حيث $k \in Z$

<u>التمرين ــ 7</u>

لتكن في C المعادلة $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ .....(1)

1 ــ تحقق أن 2 هو حل للـ عادلة (1)

2 ــ عين العددين المركبين a و b حيث : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + az + b)$

3 ــ حل في C المعادلة (1)

<u>الحـل ــ 7</u>

1 ــ $(2)^3 + 2(2)^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$

إذن : فعلا 2 هو حل للمعادلة (1)

2 ــ للبحث عن a و b يمكن استعمال المطابقة أو القسمة الاقليدية كمايلي :

$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + az + b)$ إذن : $z^2 + az + b = \dfrac{z^3 + 2z^2 - 16}{z - 2}$

$$\begin{array}{l|l} z^3+2z^2-16 & z-2 \\ \underline{z^3-2z^2} & \overline{z^2+4z+8} \\ 4z^2-16 & \\ \underline{4z^2-8z} & \\ 8z-16 & \\ \underline{8z-16} & \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : $a=4$ و $b=8$

أي : $z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+4z+8)$

3 ـ المعادلة (1) تكافئ $\begin{cases} z=2 \\ \text{أو} \\ z^2+4z+8=0 \quad ....(2) \end{cases}$

لنحل المعادلة (2) في C : $\Delta=16-32=-16=(4i)^2$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-4-4i}{2}=-2-2i \\ z_2=\dfrac{-4+4i}{2}=-2+2i \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة (1) هي $\{2\,;-2-2i\,;-2+2i\}$

التمرين ـ 8

1 ـ حل في C المعادلة $z^2+z+1=0$

2 ـ استنتج حلول المعادلة $z^3-1=0$ في C

3 ـ نضع $u=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

أ) أحسب u^2 ؛ u^3 ؛ u^{2008}

ب) أحسب $S=u+u^2+u^3+.....+u^{2008}$

الحل ـ 8

1 ـ $z^2+z+1=0$: $\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2 ـ $z^3-1=0$ تكافئ $(z-1)(z^2+z+1)=0$

تكافئ $\begin{cases} z-1=0 \\ \text{أو} \\ z^2+z+1=0 \end{cases}$

إذن : حلول المعادلة $z^3-1=0$ هي $\left\{1\,;-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

3 ـ أ) $u=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(2\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\dfrac{\pi}{3}\right)$

إذن : $u^2=\left(\cos 2\dfrac{\pi}{3}+i\sin 2\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\cos 4\dfrac{\pi}{3}+i\sin 4\dfrac{\pi}{3}=\overline{u}$ حيث $\overline{u}$ هو مرافق u

$$u^3=\left(\cos 2\frac{\pi}{3}+i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$$u^{2008}=\left(\cos 2\frac{\pi}{3}+i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^{2008}=\cos 4016\frac{\pi}{3}+i\sin 4016\frac{\pi}{3}$$

$$=\cos 2\frac{\pi}{3}+i\sin 2\frac{\pi}{3}=u$$

ب) ليكن n عدد طبيعي نميز الحالات التالية :

$n = 3k$ منه $u^n = u^{3k} = (u^3)^k = 1^k = 1$

$n = 3k+1$ منه $u^n = u^{3k+1} = u^{3k} \times u = u$

$n = 3k+2$ منه $u^n = u^{3k+2} = u^{3k} \times u^2 = \overline{u}$

نتيجة :

$$S = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \ldots + u^{2005} + u^{2006} + u^{2007} + u^{2008}$$
$$= (u + \overline{u} + 1) + (u + \overline{u} + 1) + \ldots + (u + \overline{u} + 1) + u$$
$$= \frac{2007}{3}(u + \overline{u} + 1) + u$$
$$= 669(u + \overline{u} + 1) + u$$
$$= 669\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + u$$
$$= 669(0) + u$$
$$= u$$
$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

التمرين ــ 9

p كثير حدود للمتغير المركب، z معرف بــ $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1 ــ عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد مركب z :

$p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

2 ــ حل في C المعادلة $p(z) = 0$

الحل ــ 9

1 ــ $(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a) = z^4 + 4z^3 + 2az^2 + az^3 + 4az^2 + 2a^2z + bz^2 + 4bz + 2ba$

$$= z^4 + z^3(4 + a) + z^2(6a + b) + z(2a^2 + 4b) + 2ab$$

بالمطابقة مع عبارة $p(z)$ نحصل على

$$\begin{cases} 4 + a = 0 \\ 6a + b = -19 \\ 2a^2 + 4b = 52 \\ 2ab = -40 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -19 - 6a \\ b = \dfrac{52 - 2a^2}{4} \\ b = \dfrac{-40}{2a} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -19 + 24 \\ b = \dfrac{52 - 32}{4} \\ b = \dfrac{-40}{-8} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \\ b = 5 \\ b = 5 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

نتيجة : $p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$

2 ـ $p(z) = 0$ يكافئ $\begin{cases} (\alpha) \ldots\ldots z^2 - 4z + 5 = 0 \\ \text{أو} \\ (\beta) \ldots\ldots z^2 + 4z - 8 = 0 \end{cases}$

حل المعادلة (α) : $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \\ z_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \end{cases}$$

حل المعادلة (β) : $\Delta = 16 + 32 = 48 = (4\sqrt{3})^2$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3} \\ z_2 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ في C هي : $\{-2 - 2\sqrt{3}\,;\, -2 + 2\sqrt{3}\,;\, 2 - i\,;\, 2 + i\}$

التمرين ــ 10

1 ــ حل في C المعادلة $z^4 - 1 = 0$

2 ــ استنتج حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ في C

الحــل ــ 10

1 ــ $z^4 - 1 = 0$ يكافئ $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$

يكافئ $\begin{cases} z^2 - 1 = 0 \\ \text{أو } z^2 + 1 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = 1 \text{ أو } z = -1 \\ \text{أو } z = i \text{ أو } z = -i \end{cases}$

إذن : حلول المعادلة $z^4 - 1 = 0$ هي $\{1\,;\, -1\,;\, i\,;\, -i\}$

2 ــ نضع $t = \frac{2z+1}{z-1}$ مع $z \neq 1$

إذن : المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ تكافئ $t^4 - 1 = 0$

تكافئ $t = 1$ أو $t = -1$ أو $t = i$ أو $t = -i$

الحالة (1) $t = 1$ إذن : $\frac{2z+1}{z-1} = 1$

أي : $2z + 1 = z - 1$

أي : $z = -2$

الحالة (2) $t = -1$ إذن : $\frac{2z+1}{z-1} = -1$

أي $2z + 1 = -z + 1$

أي $3z = 0$

أي $z = 0$

الحالة (3) $t = i$ إذن : $\frac{2z+1}{z-1} = i$

أي : $2z + 1 = iz - i$

أي $z(2 - i) = -1 - i$

أي $z = \frac{-1 - i}{2 - i}$

أي $z = \frac{-1-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$

أي $z = \frac{-2-i-2i+1}{4+1}$

أي $z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

الحالة (4) $t = -i$ أي ، $\frac{2z+1}{z-1} = -i$

أي : $2z+1 = -iz+i$

أي $z(2+i) = -1+i$

أي $z = \frac{-1+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$

أي $z = \frac{-2+i+2i+1}{4+1}$

أي $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

خلاصة : حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ هي $\left\{-2\,;0\,;\frac{-1}{5}-\frac{3}{5}i\,;\frac{-1}{5}+\frac{3}{5}i\right\}$

التمرين ــ 11

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1 ــ α عدد حقيقي . عبر بدلالة α عن الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد $p(i\alpha)$

2 ــ عين قيم α حتى يكون $p(i\alpha) = 0$

3 ــ عين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z^2+9)(z^2+bz+c)$

4 ــ حل في C المعادلة $p(z) = 0$

الحــل ــ 11

1 ــ $p(i\alpha) = (i\alpha)^4 - 10(i\alpha)^3 + 38(i\alpha)^2 - 90(i\alpha) + 261$

$= \alpha^4 + 10i\alpha^3 - 38\alpha^2 - 90i\alpha + 261$

$= \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 + i(10\alpha^3 - 90\alpha)$

إذن : $\begin{cases} Re[p(i\alpha)] = \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 \\ Im[p(i\alpha)] = 10\alpha^3 - 90\alpha \end{cases}$

2 ــ $p(i\alpha) = 0$ يكافئ $\begin{cases} (1)\ \ldots\ \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 = 0 \\ (2)\ \ldots\ 10\alpha^3 - 90\alpha = 0 \end{cases}$

نحل المعادلة (2) : $10\alpha^3 - 90\alpha = 0$ تكافئ $10\alpha(\alpha^2 - 9) = 0$

تكافئ $\alpha \in \{0\,;3\,;-3\}$

هل $\alpha = 0$ حل للمعادلة (1) ؟ $0 - 0 + 261 \neq 0$ إذن : $\alpha = 0$ مرفوض

هل $\alpha = 3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 342 + 261 = 0$ إذن : $\alpha = 3$ مقبول

هل $\alpha = -3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 342 + 261 = 0$ إذن : $\alpha = -3$ مقبول

خلاصة : $p(i\alpha) = 0$ تكافئ $\alpha = 3$ أو $\alpha = -3$

3 ــ $p(z) = (z^2+9)(z^2+bz+c)$ يكافئ $z^2 + bz + c = \frac{p(z)}{z^2+9}$

لنجري القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{l|l} z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 & z^2 + 9 \\ \underline{z^4 \quad\quad + 9z^2} & \overline{z^2 - 10z + 29} \\ 0 - 10z^3 + 29z^2 - 90z + 261 & \\ \underline{\quad -10z^3 \quad\quad - 90z} & \\ \quad 0 \quad + 29z^2 + 0 + 261 & \\ \underline{\quad\quad 29z^2 \quad\quad + 261} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

نتيجة : $z^2 + bz + c = z^2 - 10z + 29$

أي $b = -10$ ؛ $c = 29$

$p(z) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z^2 + 9 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 10z + 29 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z \in \{3i ; -3i\} \\ \text{أو } z^2 - 10z + 29 = 0 \end{cases}$

لنحل المعادلة $z^2 - 10z + 29 = 0$: $\Delta = 100 - 116 = -16 = (4i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{10 - 4i}{2} = 5 - 2i \\ z_2 = \dfrac{10 + 4i}{2} = 5 + 2i \end{cases}$$

خلاصة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{3i ; -3i ; 5 - 2i ; 5 + 2i\}$

التمرين ــ 12

1 ــ أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $1 - i$

2 ــ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z = \dfrac{(-1 - 3i)z + 3 + i}{z - 1}$ حيث z_0 هو الحل الذي له أصغر طويلة .

3 ــ أحسب العدد $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ و أكتبه على شكله الجبري .

4 ــ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا

الحل ــ 12

1 ــ $1 - i = \sqrt{2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

2 ــ $z = \dfrac{(-1 - 3i)z + 3 + i}{z - 1}$ يكافئ $z^2 - z = (-1 - 3i)z + 3 + i$ مع $z \neq 1$

يكافئ $z^2 + 3iz - 3 - i = 0$ مع $z \neq 1$

$\Delta = -9 - 4(-3 - i) = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i = (2 + i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-3i - 2 - i}{2} = -1 - 2i \\ z_2 = \dfrac{-3i + 2 + i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

$|z_1| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ ؛ $|z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$|z_1| > |z_2|$ إذن : $z_0 = z_2 = 1 - i$

3 ــ حسب السؤال (1) : $z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

إذن : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$

$= \cos 2008\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin 2008\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos(-502\pi) + i\sin(-502\pi)$

$= 1$

4 ــ $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos\left(-n\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-n\dfrac{\pi}{4}\right)$

إذن : يكون $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^2$ حقيقيا إذا و فقط إذا كان $\sin\left(-n\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

أي $n = 4k$ مع $k \in N$

التمرين ـ 13

من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب $L(z)$ المعرف بـــ : $L(z) = \dfrac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz+2}$

1 ـ أوجد الأعداد المركبة z حيث $L(z) = z$ ثم أكتبها على شكلها المثلثي

2 ـ لتكن M نقطة لاحقتها z

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا

الحـل ـ 13

ليكن $z \neq 2i$

1 ـ $L(z) = z$ تكافئ $\dfrac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz+2} = z$

تكافئ $z(iz+2) = (5-i)z + 2(1+i)$

تكافئ $iz^2 + 2z - (5-i)z - 2 - 2i = 0$

تكافئ $iz^2 + z(2-5+i) - 2 - 2i = 0$

تكافئ $iz^2 + (-3+i)z - 2 - 2i = 0$

$$\Delta = (-3+i)^2 - 4i(-2-2i)$$
$$= 9 - 6i - 1 + 8i - 8$$
$$= 2i$$
$$= (1+i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{3-i-1-i}{2i} = \dfrac{1-i}{i} = \dfrac{1-i}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = -1-i \\ z_2 = \dfrac{3-i+1+i}{2i} = \dfrac{4}{2i} = \dfrac{2}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = -2i \end{cases}$$

نتيجة : الأعداد المركبة z التي تحقق $L(z) = z$ هي $\{-1-i\ ;\ -2i\}$

الشكل المثلثي :
$$-1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$-2i = 2\left[\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

2 ـ ليكن $z = x + iy$ حيث $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 2)$ لأن $z \neq 2i$

$$L(z) = \frac{(5-i)(x+iy) + 2(1+i)}{i(x+iy)+2}$$
$$= \frac{5x + 5iy - ix + y + 2 + 2i}{ix - y + 2}$$
$$= \frac{(5x+y+2) + (5y-x+2)i}{2-y+ix} \times \frac{2-y-ix}{2-y-ix}$$
$$= \frac{(5x+y+2)(2-y) - x(5x+y+2)i + (5y-x+2)(2-y)i + x(5y-x+2)}{(2-y)^2 + x^2}$$
$$= \frac{(5x+y+2)(2-y) + x(5y-x+2)}{(2-y)^2+x^2} + \frac{(5y-x+2)(2-y) - x(5x+y+2)}{(2-y)^2+x^2}\, i$$

نتيجة : يكون $L(z)$ تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (5x+y+2)(2-y) + x(5y-x+2) = 0 \ \ldots\ldots\ (1) \\ L(z) \neq 0 \ \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

الشرط (1) يكافئ $10x - 5xy + 2y - y^2 + 4 - 2y + 5xy - x^2 + 2x = 0$

يكافئ $-y^2 - x^2 + 12x + 4 = 0$

يكافئ $x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$

يكافئ $(x-6)^2 + y^2 - 36 - 4 = 0$

يكافئ $(x-6)^2 + y^2 = 40$ هي معادلة الدائرة (C) التي مركزها النقطة $w(6\ ;\ 0)$

و نصف قطرها $\sqrt{40}$

الشرط (2) يكافئ $(5-i)\,z+2(1+i)\neq 0$

لنحل المعادلة $(5-i)\,z+2(1+i)=0$

$$z=\frac{-2-2i}{5-i}\times\frac{5+i}{5+i}$$

$$=\frac{-10-2i-10i+2}{25+1}$$

$$=\frac{-8-12i}{26}$$

$$=\frac{-4}{13}-\frac{6}{13}i$$

إذن : الشرط (2) يكافئ $z\neq\frac{-4}{13}-\frac{6}{13}i$

هل النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{-4}{13}\,;\,\frac{-6}{13}\right)$ تنتمي إلى الدائرة C ؟

$$\left(-\frac{4}{13}-6\right)^2+\left(\frac{6}{13}\right)^2=\left(\frac{82}{13}\right)^2+\left(\frac{6}{13}\right)^2=\frac{6760}{169}=40$$

إذن : فعلا النقطة $A\left(\frac{-4}{13}\,;\,\frac{-6}{13}\right)$ تنتمي إلى الدائرة (C)

خلاصة : يكون $L(z)$ تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كانت M نقطة من الدائرة (C) ذات المركز $w(6\,;0)$ و نصف القطر $\sqrt{40}$ باستثناء النقطتين $B(0\,;2)$ و $W\left(\frac{-4}{13}\,;\,\frac{-6}{13}\right)$

التمرين ــ 14

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z)=z^3-i\,z^2+(1-i)\,z-2+2i$

1 ــ أحسب $p(1)$ ثم استنتج كثير الحدود $Q(z)$ حيث $p(z)=(z-1)\,Q(z)$ من أجل كل عدد مركب z

2 ــ حل في C المعادلة $p(z)=0$

3 ــ لتكن A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها حلول المعادلة $p(z)=0$

ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحــل ــ 14

1 ــ $p(1)=1-i+1-i-2+2i=2-2i-2+2i=0$

إذن : $p(z)=(z-1)\,Q(z)$ حيث $Q(z)=\frac{p(z)}{z-1}$ ، $z\neq 1$

لنجري القسمة الاقليدية :

$$\begin{array}{l|l} z^3-i\,z^2+(1-i)\,z-2+2i & z-1 \\ \underline{z^3-z^2} & z^2+(1-i)\,z+2(1-i) \\ (1-i)\,z^2+(1-i)\,z-2+2i & \\ \underline{(1-i)\,z^2-(1-i)\,z} & \\ 2(1-i)\,z-2+2i & \\ \underline{2(1-i)\,z-2+2i} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن : $Q(z)=z^2+(1-\ )\,z+2(1-i)$

2 ــ $p(z)=0$ تكافئ $\left\{\begin{array}{l} z-1=0 \\ \text{أو } z^2+(1-i)\,z+2(1-i)=0 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} z=1 \\ \text{أو } (2)\ \dots\ z^2+(1-i)\,z+2-2i=0 \end{array}\right.$

نحل المعادلة (2) في C :

$$\Delta=(1-i)^2-4(2-2i)$$

$$=1-2i-1-8+8i$$

$$=-8+6i$$

$= (1+3i)^2$

ملاحظة : للبحث عن الجذر التربيعي لـ $-8+6i$ نضع $(\alpha + \beta i)^2 = -8+6i$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-8+\sqrt{64+36}}{2}} = \sqrt{\dfrac{-8+10}{2}} = 1 \\ \beta = \dfrac{6}{2\alpha} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$

منه : $-8+6i = (1+3i)^2$

إذن : $z_1 = \dfrac{-1+i-1-3i}{2} = -1-i$

$z_2 = \dfrac{-1+i+1+3i}{2} = 2i$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{1 ; 2i ; -1-i\}$

3 ــ لتكن A ، B ، C لواحقها على الترتيب : 1 ؛ $2i$ ؛ $-1-i$

$AB^2 = |2i-1|^2 = 4+1 = 5$

$AC^2 = |-1-i-1|^2 = |-2-i|^2 = 4+1 = 5$

$BC^2 = |-1-i-2i|^2 = |-1-3i|^2 = 1+9 = 10$

نتيجة : $\begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$ إذن : ABC مثلث متساوي الساقين ، إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في A

خلاصة : ABC قائم و متساوي الساقين

التمرين ــ 15

p كثير حدود للمتغير المركب z معرف كمايلي : $p(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$

1 ــ تحقق أن $p(2+i) = 0$ ثم عين كثير الحدود $Q(z)$ حيث $p(z) = (z-2-i)\,Q(z)$

2 ــ حل في C المعادلة $p(z) = 0$

3 ــ لتكن A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها حلول المعادلة $p(z) = 0$ حيث $2+i$ هي لاحقة النقطة A

عين احداثيات النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD

الحـل ــ 15

1 ــ $p(2+i) = (2+i)^3 - (4+i)(2+i)^2 + (5+4i)(2+i) - 5i$

$= 2 + 11i - 8 - 19i + 10 + 5i + 8i - 4 - 5i$

$= 0$

إذن : $p(z) = (z-2-i)Q(z)$: $Q(z) = \dfrac{p(z)}{z-2-i}$

لنجري القسمة الاقليدية :

$$\begin{array}{l|l} z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i & z-2-i \\ \underline{z^3-(2+i)z^2} & z^2-2z+1+2i \\ \quad -2z^2+(5+4i)z-5i & \\ \quad \underline{-2z^2+(4+2i)z} & \\ \qquad (1+2i)z-5i & \\ \qquad \underline{(1+2i)z-5i} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

نتيجة : $Q(z) = z^2 - 2z + 1 + 2i$

2 ــ $p(z) = 0$ تكافئ $\begin{cases} z-2-i = 0 \\ \text{أو } z^2-2z+1+2i = 0 \text{ .... } (\alpha) \end{cases}$

نحل المعادلة (α) : $\Delta = 4 - 4(1+2i) = -8i = (2-2i)^2$

إذن : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2-2+2i}{2} = i \\ z_2 = \dfrac{2+2-2i}{2} = 2-i \end{cases}$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{2+i ; i ; 2-i\}$

لتكن z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب .

إذن : A هي مرجع الجملة $\{(B\,;1)\,;(C\,;1)\,;(D\,;1)\}$

منه : $\frac{z_B + z_C + z_D}{3} = z_A$ أي $z_B + z_C + z_D = 3\,z_A$

إذن : $z_D = 3\,z_A - z_B - z_C$

أي : $z_D = 3(2+i) - i - (2-i) = 6 + 3\,i - i - 2 + i = 4 + 3i$

نتيجة : احداثيات النقطة D هي $D(4\,;3)$

التمرين ــ 16

لتكن في C المعادلة $z^3 - (6+i)\,z^2 + (13+i)\,z - 10 + 2\,i = 0$ .... (E)

1 ــ أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه

2 ــ حل في C المعادلة (F) و ليكن z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2

3 ــ عين احداثيي النقطة G مرجح الجملة $\{(A\,;-2)\,;(B\,;3)\,;(C\,;1)\}$

4 ــ عين المجموعة E_M من نقط المستوي حيث $-2\,MA^2 + 3\,MB^2 + MC^2 = 9$

الحـل ــ 16

1 ــ ليكن $\alpha \in R$

α حل للمعادلة (E) يكافئ $\alpha^3 - (6+i)\,\alpha^2 + (13+i)\,\alpha - 10 + 2\,i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - 6\,\alpha^2 - i\,\alpha^2 + 13\,\alpha + i\,\alpha - 10 + 2\,i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - 6\,\alpha^2 + 13\,\alpha - 10 - i(\alpha^2 - \alpha - 2) = 0$

يكافئ $\begin{cases} (1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \\ (2) \ldots\ldots\ \alpha^3 - 6\,\alpha^2 + 13\,\alpha - 10 = 0 \end{cases}$

نحل المعادلة (1) : $\Delta = 1 + 8 = 9$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ \alpha_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

هل $\alpha = -1$ حل للمعادلة (2) ؟ $-1 - 6 - 13 - 10 = -30$

إذن : $\alpha = -1$ مرفوض

هل $\alpha = 2$ حل للمعادلة (2) ؟ $8 - 24 + 26 - 10 = 34 - 34 = 0$

نتيجة : $\alpha = 2$ حل للمعادلة (E) إذن $z_0 = 2$

ــ 2

$$\begin{array}{l|l} z^3 - (6+i)\,z^2 + (13+i)\,z - 10 + 2\,i & z - 2 \\ \underline{z^3 - 2\,z^2} & \overline{z^2 + (-4-i)\,z + 5 - i} \\ (-4-i)\,z^2 + (13+i)\,z - 10 + 2\,i & \\ \underline{(-4-i)\,z^2 + (8+2\,i)\,z} & \\ (5-i)\,z - 10 + 2\,i & \\ \underline{(5-i)\,z - 10 + 2\,i} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $\begin{cases} z = 2 \\ \text{أو} \\ (1) \ldots\ldots\ z^2 + (-4-i)\,z + 5 - i = 0 \end{cases}$

لنحل في C المعادلة (1) :

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 + 8\,i - 1 - 4(5-i) \\ &= 15 + 8\,i - 20 + 4\,i \\ &= -5 + 12\,i \\ &= (\alpha + \beta\,i)^2 \end{aligned}$$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{25+144}}{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = 2 \\ \beta = \dfrac{12}{2\alpha} = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases}$

نتيجة : $-5+12\,i = (2+3\,i)^2$

منه : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{4+i-2-3\,i}{2} = 1-i \\ z_2 = \dfrac{4+i+2+3\,i}{2} = 3+2\,i \end{cases}$

نتيجة : حلول المعادلة (E) هي $z_0 = 2$ ؛ $z_1 = 1-i$ ؛ $z_2 = 3+2\,i$

3 ـ لتكن z لاحقة النقطة G إذن :

$$z = \frac{-2(2)+3(1-i)+3+2\,i}{-2+3+1} = \frac{-4+3-3\,i+3+2\,i}{2} = 1-\frac{1}{2}\,i$$

منه : $G\left(1\,;-\frac{1}{2}\right)$

4 ـ $-2\,MA^2+3\,MB^2+MC^2 = 9$ يكافئ $-2\,GA^2+3\,GB^2+GC^2+2\,MG^2 = 9$

يكافئ $MG^2 = \dfrac{9+2\,GA^2-3\,GB^2-GC^2}{2}$

$$GA^2 = \left|1-\frac{1}{2}\,i-2\right|^2 = \left|-1-\frac{1}{2}\,i\right|^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$GB^2 = \left|1-\frac{1}{2}\,i-1+i\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\,i\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$GC^2 = \left|1-\frac{1}{2}\,i-3-2\,i\right|^2 = \left|-2-\frac{5}{2}\,i\right|^2 = 4+\frac{25}{4} = \frac{41}{4}$$

نتيجة : $MG^2 = \dfrac{9+2\left(\frac{5}{4}\right)-3\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{41}{4}}{2}$

أي $MG^2 = \dfrac{36+10-3-41}{8}$

أي $MG^2 = \dfrac{1}{4}$

أي $MG = \dfrac{1}{2}$

إذن : مجموعة النقط E_M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1/2

<u>التمرين ـ 17</u>

ليكن $a = 3+i\sqrt{3}$ ؛ $b = 2+\sqrt{3}+3\,i$

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقا على الترتيب a ؛ $\overline{a}$ ؛ b حيث $\overline{a}$ هو مرافق a

1 ـ بين أن المثلث AOB متقايس الأضلاع (O هي مبدأ المعلم)

2 ـ عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث AOB

ليكن α و β عددين مركبين و T التحويل النقطي للمستوي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى 'M ذات اللاحقة 'z حيث $z' = \alpha z+\beta$

3 ـ عين α و β حتى يكون $T(O) = G$ و $T(A) = C$

4 ـ بين أن T دوران يطلب مركزه و زاويته

<u>الحل ـ 17</u>

1 ـ $\begin{cases} OA^2 = |3+i\sqrt{3}|^2 = 9+3 = 12 \\ OB^2 = |3-i\sqrt{3}|^2 = 9+3 = 12 \\ AB^2 = |3-i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}|^2 = |-2\,i\sqrt{3}|^2 = 12 \end{cases}$

نتيجة : $OA = OB = AB$ إذن : OAB مثلث متقايس الأضلاع .

2 ـ $z_G = \dfrac{3 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3} + 0}{3} = 2$

إذن : $G(2\,;\,0)$ هي مركز ثقل المثلث OAB

3 ـ $\begin{cases} T(O) = G \\ T(A) = C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(0) + \beta = 2 \\ \alpha(3 + i\sqrt{3}) + \beta = 2 + \sqrt{3} + 3i \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha(3 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 3i \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} \times \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{9 + 3} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{6\sqrt{3} + 6i}{12} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$

نتيجة : عبارة التحويل (T) هي : $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z + 2$

4 ـ $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\left.\begin{array}{l} |\alpha| = 1 \\ Arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\}$ إذن : (T) هو دوران زاويته $\dfrac{\pi}{6}$ و مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{2}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)}$

التمرين ـ 18

A و B نقطتان من المستوي لواحقها على الترتيب $4 + 2i$ و $3 - i$

1 ـ ما هي طبيعة المثلث OAB ؟ (O هو مبدأ المعلم)

2 ـ عين مركز و زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B و B إلى O

3 ـ لتكن C صورة O بالدوران R . ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$

الحـل ـ 18

1 ـ $AO^2 = |4 + 2i|^2 = 16 + 4 = 20$

$BO^2 = |3 - i|^2 = 9 + 1 = 10$

$AB^2 = |3 - i - 4 - 2i|^2 = |-1 - 3i|^2 = 1 + 9 = 10$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} BO = AB \\ BO^2 + AB^2 = AO^2 \end{array}\right\}$ إذن : المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في B

2 ـ ليكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة الدوران R حيث α و β عددين مركبين و $|\alpha| = 1$

$\begin{cases} R(A) = B \\ R(B) = O \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(4 + 2i) + \beta = 3 - i \;........\; (1) \\ \alpha(3 - i) + \beta = 0 \;.............\; (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $\alpha(4 + 2i - 3 + i) = 3 - i$

أي $\alpha = \dfrac{3-i}{1+3i}$

أي $\alpha = \dfrac{3-i}{1+3i} \times \dfrac{1-3i}{1-3i}$

أي $\alpha = \dfrac{3-9i-i-3}{10}$

أي $\alpha = -i$ مقبول لأن $|-i| = 1$

بالتعويض في (2) : $\beta = -\alpha(3-i) = i(3-i) = 1+3$.

نتيجة : عبارة الدوران R هي $z' = -iz + 1 + 3i$

النقطة الصامدة : $\dfrac{1+3i}{1+i} = \dfrac{1+3i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i+3i+3}{2} = 2+i$

زاوية الدوران : $-i = 1\left[\cos 3\dfrac{\pi}{2} + i\sin 3\dfrac{\pi}{2}\right]$

إذن : $\mathrm{Arg}(\alpha) = 3\dfrac{\pi}{2}$

خلاصة : R دوران مركزه $w(2\,;1)$ و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$

3 ــ لنبحث عن لاحقة النقطة C :

$T(0) = C$ إذن : لاحقة C هي $-i(0) + 1 + 3i = 1 + 3i$

نتيجة : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4-1\\2-3\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ إذن : الرباعي ABOC متوازي أضلاع

بما أن $AB = BO$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BO}$ فإن ABOC مربع

<u>التمرين ــ 19</u>

لتكن A و B نقطتان من المستوي لاحقتهما على الترتيب $3-2i$ و $-1+6i$
w نقطة من حامل محور الفواصل . R الدوران الذي مركزه w و يحول A إلى B
عين احداثيي المركز w و زاوية الدوران R

<u>الحـل ــ 19</u>

لتكن $w(x\,;0)$ حيث $x \in R$

$R(A) = B$ إذن : $WA = WB$

منه : $WA^2 = WB^2$

أي : $|3-2i-x|^2 = |-1+6i-x|^2$

أي : $(3-x)^2 + 4 = (1+x)^2 + 36$

أي : $9 - 6x + x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2 + 36$

أي : $-6x + 13 = 2x + 37$

أي : $x = -3$

نتيجة : مركز الدوران R هو $w(-3\,;0)$

لتكن θ زاوية الدوران إذن : $\theta = (\overrightarrow{WA}\,;\overrightarrow{WB})$

$= \mathrm{Arg}(-1+6i+3) - \mathrm{Arg}(3-2i+3)$

$= \mathrm{Arg}\left(\dfrac{2+6i}{6-2i}\right)$

$= \mathrm{Arg}\left(\dfrac{1+3i}{3-i}\right)$

$= \mathrm{Arg}\left(\dfrac{1+3i}{3-i} \times \dfrac{3+i}{3+i}\right)$

$$= \text{Arg}\left(\frac{3 + i + 9i - 3}{9 + 1} \right)$$
$$= \text{Arg}(i)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

خلاصة : R دوران مركزه $w(-3 ; 0)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

التمرين ــ 20

A ، B ، C ، D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $2i$ ؛ 6 ؛ $1+i$ ؛ $3-3i$

α و β عددان مركبان و T التحويل النقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = 3\alpha z + \beta$

عين α و β علما أن $T(A) = B$ و $T(C) = D$

الحــل ــ 20

1 ــ $\begin{cases} T(A) = B \\ T(C) = D \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3\alpha(2i) + \beta = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3\alpha(1+i) + \beta = 3 - 3i \ldots. (2) \end{cases}$

نطرح (2) من (1) : $3\alpha(2i - 1 - i) = 6 - 3 + 3i$

أي $3\alpha(-1+i) = 3(1+i)$

أي $\alpha = \frac{1+i}{-1+i}$

أي $\alpha = \frac{1+i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i}$

أي $\alpha = \frac{-1-i-i+1}{2}$

أي $\alpha = -i$

بالتعويض في (1) نحصل على :
$$\beta = 6 - 3\alpha(2i)$$
$$= 6 - 3(-i)(2i)$$
$$= 6 - 6$$
$$= 0$$

خلاصة : عبارة التحويل T هي : $z' = -3iz$

التمرين ــ 21

$A(2 ; 1)$ ؛ $B(3 ; 0)$ نقدتان من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

H هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{-\sqrt{2}}{4}$

R هو الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

T هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BO}$

1 ــ أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات H ؛ R ؛ T

2 ــ أكتب العبارة المركبة للتحويل ToRoH

3 ــ عين النقطة C حيث $(ToRoH)(C) = O$ (O هي مبدأ المعلم)

الحــل ــ 21

عبارة H : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{4} z + \beta$ حيث $2 + i = \frac{\beta}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4}}$ (المركز هو A)

منه : $\beta = (2+i)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

أي : $\beta = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i$

نتيجة : عبارة H $z' = -\frac{\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i$

عبارة **R** : $z' = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \beta$ حيث $3 = \dfrac{\beta}{1 - \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$ (المركز)

منه : $\beta = 3\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right]$

أي $\beta = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

نتيجة : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) z + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$ عبارة R

عبارة **T** : $z' = z - 3$ عبارة T

2 ــ ليكن z عدد مركب .

$$RoH(z) = R[H(z)]$$

$$= R\left[\frac{-\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right]$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\left[\frac{-\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) z + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-2}{8}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i - 2i - \frac{\sqrt{2}}{2} i + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + i\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right) + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

إذن : $ToRoH(z) = T\left[-\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)\right]$

$$= -\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{3}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

و هي العبارة المركبة لــ ToRoH

3 ــ لتكن z لاحقة النقطة C

$ToRoH(C) = O$ يكافئ $ToRoH(z) = 0$

يكافئ $-\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{3}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) = 0$

يكافئ $\frac{1}{4}\left[-(1 - i) z + 3 + i(4\sqrt{2} - 1)\right] = 0$

يكافئ $-(1 - i) z + 3 + i(4\sqrt{2} - 1) = 0$

يكافئ $z = \dfrac{3 + i(4\sqrt{2} - 1)}{1 - i}$

يكافئ $z = \dfrac{3 + i(4\sqrt{2} - 1)}{1 - i} \times \dfrac{1 + i}{1 + i}$

يكافئ $z = \dfrac{3 + 3\,i + i(4\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2} + 1}{2}$

يكافئ $z = \dfrac{4 - 4\sqrt{2} + i(4\sqrt{2} + 2)}{2}$

يكافئ $z = 2 - 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} + 1)$

نتيجة : احداثيي النقطة C هما $C(2 - 2\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2} + 1)$

التمرين ـ 22

1 ـ حل في C المعادلة $z^2 - (2 + i)\,z + 3 + i = 0$ و ليكن z_0 و z_1 حلولها حيث $|z_0| > |z_1|$

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ؛ z_0 ؛ z_1

2 ـ عين احداثيي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، C

3 ـ T التحويل النقطي للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

أ) بين أن $\overrightarrow{GM'} = -2\,\overrightarrow{GM}$

ب) إستنتج طبيعة التحويل T و عناصره المميزة .

ج) أكتب العبارة المركبة للتحويل T

4 ـ A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل T

بين أن النقط A' ، B' ، C' على استقامية

الحـل ـ 22

1 ـ $z^2 - (2 + i)\,z + 3 + i = 0$:

$$\Delta = 4 + 4\,i - 1 - 12 - 4\,i = -9 = (3\,i)^2$$

$$\begin{cases} z' = \dfrac{2 + i - 3\,i}{2} = 1 - i \\ z'' = \dfrac{2 + i + 3\,i}{2} = 1 + 2\,i \end{cases}$$

$|z_0| > |z_1|$ إذن $\begin{cases} z_0 = 1 + 2\,i \\ z_1 = 1 - i \end{cases}$

2 ـ لتكن z لاحقة النقطة G إذن : $z = \dfrac{1 + 1 + 2\,i + 1 - i}{3} = 1 + \dfrac{1}{3}\,i$

منه : $G(1\,;\,1/3)$

3 ـ أ)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM'} &= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'} \\ &= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{GM} + 3\,\overrightarrow{MG} \\ &= \overrightarrow{GM} - 3\,\overrightarrow{GM} \\ &= -2\,\overrightarrow{GM} \end{aligned}$$

لأن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$

ب) $\overrightarrow{GM'} = -2\,\overrightarrow{GM}$ إذن : M' هي صورة M بالتحاكي الذي مركزه $G(1\,;\,1/3)$ و نسبته -2

ج) T تحاكي نسبته -2 و مركزه G إذن : عبارته $z' = -2\,z + \beta$ حيث

$\dfrac{\beta}{1 + 2} = 1 + \dfrac{1}{3}\,i$ منه $\beta = 3\left(1 + \dfrac{1}{3}\,i\right) = 3 + i$

نتيجة : عبارة التحاكي T هي : $z' = -2\,z + 3 + i$

4 ـ لدينا النقط A ، B ، C على استقامة واحدة لأن لها نفس الفاصلة إذن فهي تنتمي إلى مستقيم (Δ)

و لكن صورة (Δ) بالتحاكي (T) هو مستقيم يشمل A' ، B' ، C' إذن : A' ، B' ، C' على استقامة واحدة .

التمرين ـ 23

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_A = 2 + 2\,i$ ؛ $z_B = 5 + 5i$ ؛ $z_C = -2 - 2\,i$

1 ـ أثبت أن العدد $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

2 ـ إستنتج طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول B إلى C و A نقطة صامدة وحيدة بـ T

3 ـ أكتب العبارة المركبة للتحويل T

4 ـ (γ) منحنى معادلته $y = 3x - \frac{1}{x}$. أكتب معادلة (γ') صورة المنحنى (γ) بالتحويل T

الحل ـ 23

1 ـ
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-2i-2-2i}{5+5i-2-2i} = \frac{-4-4i}{3+3i} = \frac{-4(1+i)}{3(1+i)}$$

إذن : فعلا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4}{3}$ عدد حقيقي

2 ـ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4}{3}$ يكافئ $z_C - z_A = \frac{-4}{3}(z_B - z_A)$

يكافئ $\overrightarrow{AC} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{AB}$

بما أن $\left\{\begin{array}{l} T(B) = C \text{ و } \overrightarrow{AC} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{AB} \\ T(A) = A \text{ وحيدة} \end{array}\right.$

فإن T هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{-4}{3}$

3 ـ الشكل المركب لـ T : $z' = \frac{-4}{3}z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+\frac{4}{3}} = z_A$

منه : $\beta = \frac{7}{3}(2+2i) = \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

إذن : عبارة T هي : $z' = \frac{-4}{3}z + \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

4 ـ لنبحث عن الشكل التحليلي للتحاكي (T) :

نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ إذن : $x' + iy' = \frac{-4}{3}(x+iy) + \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

$$= \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} + i\left(\frac{14}{3} - \frac{4}{3}y\right)$$

منه $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} \\ y' = \frac{-4}{3}y + \frac{14}{3} \end{array}\right.$ العبارة التحليلية للتحاكي T

لنبحث الأن عن x و y بدلالة x' و y' :

$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} \\ y' = \frac{-4}{3}y + \frac{14}{3} \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} \frac{4}{3}x = -x' + \frac{14}{3} \\ \frac{4}{3}y = -y' + \frac{14}{3} \end{array}\right.$

منه : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-3}{4}x' + \frac{7}{2} \\ y = \frac{-3}{4}y' + \frac{7}{2} \end{array}\right.$

صورة (γ) بـ التحاكي T :

$y = 3x - \frac{1}{x}$ يكافئ $-\frac{3}{4}y' + \frac{7}{2} = 3\left(-\frac{3}{4}x' + \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{-\frac{3}{4}x' + \frac{7}{2}}$

يكافئ $-\frac{3}{4}y' = -\frac{7}{2} - \frac{9}{4}x' + \frac{21}{2} - \frac{4}{-3x' + 14}$

يكافئ $-\frac{3}{4}y' = 7 - \frac{9}{4}x' + \frac{4}{3x' - 14}$

يكافئ $y' = \frac{-28}{3} + 3x' - \frac{16}{9x' - 42}$

إذن : صورة (γ) بالتحويل T هو المنحنى (γ') ذو المعادلة $y = \frac{-28}{3} + 3x - \frac{16}{9x - 42}$

التمرين — 24

لتكن المعادلة $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$ ....(E)

1 — بين أن المعادلة (E) تقبل حلين تخيليين صرفا مترافقين z_0 و $\overline{z_0}$ حيث الجزء التخيلي لـ z_0 موجب

2 — عين الحلول الأخرى z_1 و z_2 للمعادلة (E) حيث الجزء التخيلي لـ z_1 موجب

3 — إستنتج تحويلا نقطيا بسيطا يحول z_0 إلى $\overline{z_0}$ و z_1 إلى z_2

الحــل — 24

1 — ليكن $\alpha \in R^*$

$(i\alpha)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $(i\alpha)^4 - 4(i\alpha)^3 + 14(i\alpha)^2 - 36i\alpha + 45 = 0$

يكافئ $\alpha^4 + 4i\alpha^3 - 14\alpha^2 - 36i\alpha + 45 = 0$

يكافئ $\alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 + 4i(\alpha^3 - 9\alpha) = 0$

يكافئ $\begin{cases} \alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 = 0 \text{ .... (2)} \\ \alpha^3 - 9\alpha = 0 \text{ .... (2)} \end{cases}$

حل المعادلة (2) : $\alpha^3 - 9\alpha = 0$ تكافئ $\alpha(\alpha^2 - 9) = 0$

تكافئ $\alpha^2 - 9 = 0$ لأن $\alpha \neq 0$

تكافئ $\alpha \in \{-3 ; 3\}$

هل $\alpha = 3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0$ محقق

هل $\alpha = -3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0$ محقق

نتيجة : $3i$ و $-3i$ هما حلان للمعادلة (E)

الجزء التخيلي لـ z_0 موجب إذن : $z_0 = 3i$ و $\overline{z_0} = -3i$

2 — البحث عن z_1 و z_2 :

المعادلة (E) تكافئ $(z - 3i)(z + 3i)Q(z) = 0$ حيث Q كثير حدود من الدرجة (2) للمتغير z نبحث عنه

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 & z^2 + 9 \\ \hline z^4 + 0 + 9z^2 & z^2 - 4z + 5 \\ \hline -4z^3 + 5z^2 - 36z + 45 & \\ -4z^3 + 0 - 36z & \\ \hline 5z^2 + 45 & \\ 5z^2 + 45 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : $Q(z) = z^2 - 4z + 5$

لنحل المعادلة $Q(z) = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$

$\begin{cases} z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \\ z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \end{cases}$ لأن الجزء التخيلي لـ z_1 موجب

3 — لدينا $z_2 = \overline{z_1}$ إذن : يكفي أن نأخذ التحويل T ذو العبارة $z' = \overline{z}$ الذي يحول كل عدد مركب إلى مرافقه

إذن $\begin{cases} \overline{z_0} = T(z_0) \\ z_2 = T(z_1) = \overline{z_1} \end{cases}$

و هو التناظر العمودي بالنسبة إلى محور الفواصل .

التمرين — 25

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب 1 و 4

(d) هي مجموعة نقط المستقيم (OA) ماعدا النقطة A

(Δ) هو مجموعة نقط المستقيم العمودي على (OA) في النقطة A ماعدا A

(Γ) هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 1

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب Z حيث $Z = \frac{z^2}{z-1}$

لتكن m و M نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و Z

الجزء I

لتكن f و g دالتين معرفتين بـــ $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ؛ $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

نسمي D_1 و D_2 مجموعتي تعريفي الدالتين f و g على الترتيب

أدرس تغيرات كل من f و g ثم إستنتج $f(D_1)$ و $g(D_2)$

الجزء II

1 – حل في C المعادلة Z = 3 ذات المجهول z ثم أكتب الحلول على شكلها الأسي

2 – نفرض في هذا السؤال أن $z = 1 + e^{i\theta}$ (مع $\theta \in R$)

أحسب Z بدلالة θ ثم إستنتج مجموعة النقط M لما θ يمسح IR

3 – نضع $m(x ; y)$ و $M(X ; Y)$

أ) عين مجموعة النقط M لما m تمسح المجموعة (d)

ب) عين مجموعة النقط M لما m تمسح المجموعة (Δ)

4 – أحسب X و Y بدلالة x و y . ثم عين مجموعة النقط m عندما M تمسح محور الفواصل

الحـــل – 25

الجزء I :

تغيرات الدالة f : f معرفة على IR - {1} إذن : $D_1 = IR - \{1\}$

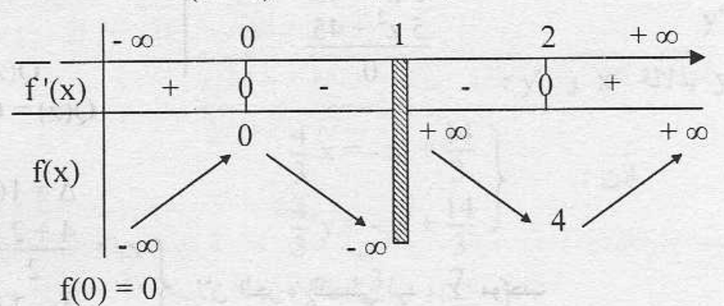
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$ ↗		0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$

$f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$

نتيجة : $f(D_1) =]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$

تغيرات الدالة g : g معرفة على *IR إذن : $D_2 = IR^*$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{2x(x) - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	‖	+	
g(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$		‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

نتيجة : $g(D_2) = IR$

الجزء II

1 ــ $Z = 3$ يكافئ $\frac{z^2}{z-1} = 3$ ،

يكافئ $z^2 = 3(z-1)$

يكافئ $z^2 - 3z + 3 = 0$

$$\Delta = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

الشكل الأسي لـــ z_1 و z_2

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2 ــ $z = 1 + e^{i\theta}$ إذن :

$$Z = \frac{(1+e^{i\theta})^2}{1 + e^{i\theta} - 1}$$

$$= \frac{1 + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{e^{i\theta}}$$

$$= e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta}$$

$$= e^{-i\theta} + 1 + 1 + e^{i\theta}$$

$= \overline{z} + z$ لأن $z = 1 + e^{i\theta}$ و $\overline{z} = 1 + e^{-i\theta}$

$$= 2\,Re(z)$$

$$= 2\,Re(1 + e^{i\theta})$$

$$= 2\,Re(1 + \cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 2(1 + \cos\theta)$$

منه $M(2(1+\cos\theta) ; 0)$

لدينا : $-1 \le \cos\theta \le 1$

إذن : $0 \le 1 + \cos\theta \le 2$

منه : $0 \le 2(1 + \cos\theta) \le 4$

إذن : M تنتمي إلى القطعة المستقيمة [OB] و هي مجموعة النقط M لما θ يمسح IR

3 ــ أ) m تمسح المجموعة (d) إذن : $m(x ; y)$ حيث $x \in IR - \{1\}$

منه $z = x$ حيث $x \in IR - \{1\}$

لدينا $Z = \frac{z^2}{z-1}$: إذن $Z = \frac{x^2}{x-1}$

إذن : $M\left(\frac{x^2}{x-1} \,;\, 0\right)$

حسب الجزء I فإن لما $x \in IR - \{1\}$ فإن $\frac{x^2}{x-1} \in]-\infty ; 0]U[4 ; +\infty[$

إذن : النقطة M تنتمي إلى محور الفواصل ماعدا القطعة المستقيمة [OB]

حيث يمكن لـــ M أن تنطبق على O أو B

ب) m تمسح المجموعة (Δ) إذن : $m(1 ; y)$ مع $y \neq 0$

منه : $z = 1 + i\,y$

إذن : $Z = \frac{(1+i\,y)^2}{1+i\,y-1}$

أي $Z = \frac{1-y^2+2\,i\,y}{i\,y}$

أي $Z = \frac{1-y^2+2\,i\,y}{i\,y} \times \frac{-i\,y}{-i\,y}$

أي $Z = \frac{-i\,y(1-y^2)+2\,y^2}{y^2}$

أي $Z = 2 - \frac{1-y^2}{y}\,i$

أي $Z = 2 + \frac{y^2-1}{y}\,i$

نعتبر الدالة h للمتغير الحقيقي y المعرفة على *IR بـــ $h(y) = \frac{y^2-1}{y}$

إذن : حسب الجزء I فإن لما $y \in IR^*$ فإن $h(y) \in IR$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z هي نقط المستقيم ذو المعادلة $x = 2$

4 ــ $Z = \frac{z^2}{z-1}$ إذن : $X + i\,Y = \frac{(x+i\,y)^2}{x+i\,y-1}$

أي $X + i\,Y = \frac{x^2-y^2+2\,x\,y\,i}{x-1+i\,y} \times \frac{x-1-i\,y}{x-1-i\,y}$

أي $X + i\,Y = \frac{(x-1)(x^2-y^2) - i\,y(x^2-y^2) + 2\,x\,y(x-1)\,i + y(2\,x\,y)}{(x-1)^2+y^2}$

أي
$$\begin{cases} X = \dfrac{(x-1)(x^2-y^2)+y(2\,x\,y)}{(x-1)^2+y^2} \\ Y = \dfrac{2\,x\,y(x-1) - y(x^2-y^2)}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} X = \dfrac{x^3 - x\,y^2 - x^2 + y^2 - 2\,x\,y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ Y = \dfrac{2\,x^2\,y - 2\,x\,y - y\,x^2 + y^3}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} X = \dfrac{x^3 - x^2 + y^2 - 3\,x\,y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ Y = \dfrac{x^2\,y + y^3 - 2\,x\,y}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$$

إذن : لما M تمسح محور الفواصل فإن $Y = 0$ منه : $x^2 y + y^3 - 2xy = 0$ مع $(x ; y) \neq (1 ; 0)$

أي $y(x^2 - 2x + y^2) = 0$

أي $y = 0$ أو $x^2 + y^2 - 2x = 0$

أي $y = 0$ أو $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

إذن : m تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ أو الدائرة التي مركزها $A(1 ; 0)$ و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة A

أي m تنتمي إلى محور الفواصل إتحاد الدائرة (Γ) ماعدا A

التمرين ـ 26

الجزء I

u عدد مركب حيث $u = 1 + i$

1 ـ أكتب u على شكله الأسي

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $S_n = u^n + \bar{u}^n$

2 ـ بين أن $S_n = \lambda_n \cos \frac{n\pi}{4}$ حيث λ_n عدد حقيقي يطلب تعيينه

3 ـ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = 0$

4 ـ أثبت أن إذا كان n عددا زوجيا فإن λ_n يكون عددا صحيحا

الجزء II

ليكن $n = 2m$ حيث $m \in IN^*$

1 ـ باستعمال دستور ثنائي الحدين أنشر العددين $(1 + i)^{2m}$ و $(1 - i)^{2m}$

2 ـ p عدد طبيعي أكتب على أبسط شكل العبارتين $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ و $i^{2p} + (-i)^{2p}$

3 ـ ليكن $m = 12$ برهن أن $\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$

الحـل ـ 26

الجزء I

1 ـ $1 + i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 ـ
$$S_n = u^n + \bar{u}^n$$
$$= \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$= (\sqrt{2})^n e^{i\frac{\pi n}{4}} + (\sqrt{2})^n e^{-i\frac{\pi n}{4}}$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4} + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i \sin\frac{n\pi}{4}\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[2 \cos n\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= 2(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4}$$

إذن : $\lambda_n = 2(\sqrt{2})^n$

3 ـ $S_n = 0$ يكافئ $\cos n\frac{\pi}{4} = 0$

يكافئ $\cos n\frac{\pi}{4} = \cos(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ حيث $k \in IN^*$ لأن n طبيعي

يكافئ $\frac{n\pi}{4} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

يكافئ $\frac{n}{2} = 2k + 1$

يكافئ $n = 2(2k+1)$ مع $k \in IN^*$

4 ـ n زوجي إذن $n = 2k$ حيث $k \in IN$

منه : $\lambda_n = 2(\sqrt{2})^{2k}$

أي $\lambda_n = 2 \times 2^k$

أي $\lambda_n = 2^{k+1}$

منه : λ_n عدد صحيح

الجزء II

1 ـ $(1+i)^{2m} = C_{2m}^0 i^0 + C_{2m}^1 i^1 + C_{2m}^2 i^2 + \ldots\ldots + C_{2m}^{2m} i^{2m}$

$(1-i)^{2m} = C_{2m}^0 (-i)^0 + C_{2m}^1 (-i)^1 + C_{2m}^2 (-i)^2 + \ldots\ldots + C_{2m}^{2m} (-i)^{2m}$

2 ـ
$$\begin{aligned} i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} &= i(i)^{2p} + (-i)(-i)^{2p} \\ &= i(i)^{2p} - i(i)^{2p} \\ &= i(i^{2p} - i^{2p}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i)^{2p} + (-i)^{2p} &= (i^2)^p + [(-i)^2]^p \\ &= (-1)^p + (-1)^p \\ &= 2(-1)^p \end{aligned}$$

3 ـ حسب الجزء I : $u^n + \overline{u}^n = 2(\sqrt{2})^n \cos n\dfrac{\pi}{4}$

إذن : $u^{2m} + \overline{u}^{2m} = 2(\sqrt{2})^{2m} \cos 2m\dfrac{\pi}{4} = 2(2)^m \cos\dfrac{m\pi}{2}$

من أجل $m = 12$:
$$\begin{cases} u^{2m} = (1+i)^{24} = C_{24}^0 i^0 + C_{24}^1 i^1 + C_{24}^2 i^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{24}^{24} i^{24} \\ \overline{u}^{2m} = (1-i)^{24} = C_{24}^0 (-i)^0 + C_{24}^1 (-i)^1 + C_{24}^2 (-i)^2 + \ldots\ldots + C_{24}^{24} (-i)^{24} \end{cases}$$

منه :
$$\begin{aligned} u^{2m} + \overline{u}^{2m} &= C_{24}^0[i^0 + (-i)^0] + C_{24}^1[i^1 + (-i)^1] + C_{24}^2[i^2 + (-i)^2] + \ldots\ldots + C_{24}^{24}[i^{24} + (-i)^{24}] \\ &= C_{24}^0[2(-1)^0] + 0 + C_{24}^2[2(-1)^1] + 0 + \ldots + C_{24}^{24}[2(-1)^{12}] \\ &= 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}] \end{aligned}$$

إذن : $u^{2\times12} + \overline{u}^{2\times12} = 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}]$

أي : $2(\sqrt{2})^{2\times12} \cos\dfrac{2\times12\pi}{4} = 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}]$

أي : $2^{12} = C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}$

أي : $\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$

التمرين ـ 27

1 ـ عين العددين الحقيقيين x و y حيث $(x+iy)^2 = 5 - 12i$

2 ـ حل في C المعادلة $iz^2 - (1-2i)z + 2(1+i) = 0$ .... (E)

3 ـ نسمي z_1 و z_2 حلول المعادلة (E)

أثبت أن z_1^{2008} و z_2^{2008} حقيقيان

الحـل ـ 27

1 ـ $(x+iy)^2 = 5 - 12i$ إذن :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i \\ |x+iy|^2 = |5-12i| \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} (1) \ldots\ldots x^2 - y^2 = 5 \\ (2) \ldots\ldots 2xy = -12 \\ (3) \ldots\ldots x^2 + y^2 = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) $2x^2 = 18$

إذن : $x^2 = 9$

إذن : $x = 3$ أو $x = -3$

ليكن $x = 3$ إذن العلاقة (2) تصبح : $2 \times 3y = -12$

منه : $y = -2$

نتيجة : $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$

2 ـ حل المعادلة $iz^2 - (1 - 2i)z + 2(1 + i) = 0$

$$\Delta = (1 - 2i)^2 - 4i(2 + 2i)$$
$$= 1 - 4i - 4 - 8i + 8$$
$$= 5 - 12i$$
$$= (3 - 2i)^2 \text{ حسب السؤال (1)}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1 - 2i - 3 + 2i}{2i} = \dfrac{-1}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = i \\ z_2 = \dfrac{1 - 2i + 3 - 2i}{2i} = \dfrac{4 - 4}{2i} \times \dfrac{-2i}{-2i} = -2 - 2i \end{cases}$$

3 ـ

$$z_1^{2003} = i^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$

$$z_2^{2008} = [-2(1 + i)]^{2008} = 2^{2008} \times \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

إذن : $z_2^{2008} = 2^{2008} \times (\sqrt{2})^{2008} \times \left[\cos\dfrac{2008\pi}{4} + i\sin\dfrac{2008\pi}{4}\right]$

منه $z_2^{2008} = 2^{2008} \times 2^{1004} \times [\cos 502\pi + i\sin 502\pi]$

أي $z_2^{2008} = 2^{3012}$

نتيجة : كل من z_1^{2008} و z_2^{2008} عددان حقيقيان

التمرين ـ 28

α عدد مركب غير معدوم

1 ـ أنشر العبارة $[1 - i(1 + \alpha)]^2$

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 + [-1 + i(1 - \alpha)]z + i\alpha + \alpha$ ذات المجهول z

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلول هذه المعادلة حيث z_1 مستقل عن α

3 ـ نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم

أكتب كل من z_1 و z_2 على شكله المثلثي

4 ـ A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z

لتكن E مجموعة النقط M من المستوي حيث $(z - z_1)(\overline{z - z_1}) = 2$

تحقق أن المبدأ 0 ينتمي إلى المجموعة E ثم عين المجموعة E

الحل ـ 28

1 ـ
$$[1 - i(1 + \alpha)]^2 = 1 - 2i(1 + \alpha) - (1 + \alpha)^2$$
$$= 1 - 2i - 2i\alpha - 1 - 2\alpha - \alpha^2$$
$$= -\alpha^2 - 2\alpha - 2i - 2i\alpha$$

2 ـ
$$\Delta = [-1 + i(1 - \alpha)]^2 - 4(i\alpha + \alpha)$$
$$= 1 - 2i(1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2 - 4i\alpha - 4\alpha$$
$$= 1 - 2i + 2i\alpha - 1 + 2\alpha - \alpha^2 - 4i\alpha - 4\alpha$$
$$= -\alpha^2 - 2\alpha - 2i - 2i\alpha$$
$$= [1 - i(1 + \alpha)]^2 \text{ حسب السؤال (1)}$$

إذن :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1 - i(1 - \alpha) - 1 + i(1 + \alpha)}{2} = \dfrac{-i + i\alpha + i + i\alpha}{2} = i\alpha \\ z_2 = \dfrac{1 - i(1 - \alpha) + 1 - i(1 + \alpha)}{2} = \dfrac{2 - i + i\alpha - i - i\alpha}{2} = 1 - i \end{cases}$$

نتيجة : z_1 مستقل عن α إذن $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = i\alpha$

3 ـــ ليكن $\alpha = i\,y$ حيث $y \in R^*$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = i\,\alpha = i\,(i\,y) = -\,y$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $y > 0$ إذن : $-y < 0$

منه $z_2 = y[\cos\pi + i\sin\pi]$

الحالة الثانية : $y < 0$ إذن : $-y > 0$

منه : $z_2 = -\,y[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$

4 ـــ من أجل $z = 0$ لدينا : $(0 - z_1)(\overline{0 - z_1}) = z_1 \times \bar{z}_1 = |z_1|^2$

إذن : $(0 - z_1)(\overline{0 - z_1}) = |1 - i|^2 = 2$

إذن : فعلا المبدأ 0 ينتمي إلى المجموعة E

لنبحث عن المجموعة (E) :

$$(z - z_1)(\overline{z - z_1}) = 2 \;\Leftrightarrow\; |z - z_1|^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow\; |z - z_1| = \sqrt{2}$$

إذن : E هي الدائرة التي مركزها النقطة A ذات اللاحقة z_1 و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

(لأن المسافة بين M و A هي $\sqrt{2}$)

Kimou.

التشابه المباشر

في كل هذا المحور نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}\,;\,\vec{oi}\,;\,oj)$

تعريف :

S تحويل نقطي للمستوي .

نقول أن S تشابه مباشر إذا وفقط إذا كان S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل أربع نقط M ، N ، P ، Q (حيث M لا تنطبق على N) إذا كانت صورها على الترتيب بالتحويل S هي 'M ، 'N ، 'P ، 'Q فإن $\frac{PQ}{MN} = \frac{P'Q'}{M'N'}$ و $(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{P'Q'})$

النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ تسمى نسبة التشابه المباشر S (عدد حقيقي موجب تماما) و الزاوية $(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{M'N'})$ تسمى زاوية التشابه المباشر S .

خاصية أساسية : كل تشابه مباشر من المستوي المركب له عبارة مركبة من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث α و β عددان مركبان و $\alpha \neq 0$ حيث نسبة هذا التشابه هي $|\alpha|$ و زاويته هي $Arg(\alpha)$

ملاحظة : باعتبار القيم الممكنة لــ α فإن كل من الانسحاب و التناظر المركزي و التحاكي و الدوران هي تشابهات للمستوي .

نشاط :

S تشابه للمستوي عبارته المركبة $z' = (1+i)\,z - 2\,i$

عين احداثيات 'A صورة $A(1\,;\,-1)$ بــ S ثم نسبة وزاوية التشابه S

الحــل : من أجل $z = 1 - i$ فإن : $z' = (1+i)(1-i) - 2\,i = 1 + 1 - 2\,i = 2 - 2\,i$

إذن : $A'(2\,;\,-2)$

لتكن k نسبة التشابه S إذن : $k = |1+i| = \sqrt{2}$

لتكن θ زاوية التشابه S إذن : $\theta = Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

تركيب تشابهين مباشرين

خاصية (1)

تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه نسبته هي جداء النسبتين و زاويته هي مجموع الزاويتين

نتائج :

ليكن S تشابه مباشر للمستوي عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$

التشابه المباشر	النسبة	الزاوية	ملاحظة
الانسحاب	1	0	$\alpha = 1$
التناظر المركزي	1	π	$\alpha = -1$
التحاكي	$\|\alpha\|$	$Arg(\alpha)$	$\alpha \in IR - \{0\,;\,1\,;\,-1\}$
الدوران	1	$Arg(\alpha)$	$\alpha \in C - IR$ و $\|\alpha\| = 1$
	$\|\alpha\|$	$Arg(\alpha)$	$\alpha \in C - IR$ و $\|\alpha\| \neq 1$

خلاصة :

S تشابه مباشر نسبته k حيث $k \in IR^*$ و زاويته θ حيث $\theta \in IR$

- ❖ إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$ فإن S انسحاب .
- ❖ إذا كان $(k\,;\,\theta) \neq (1\,;\,0)$ فإن S يقبل نقطة صامدة وحيدة w تسمى مركز التشابه . في هذه الحالة التشابه S يكتب على أحد الأشكال التالية $S = RoH$ أو $S = HoR$ حيث H هو التحاكي ذو المركز w و النسبة k و R هو الدوران ذو المركز w و الزاوية θ

مثـــال :

S_1 تشابه عبارته $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right) z + 3i$

S_2 تشابه عبارته $z' = (\sqrt{3} + i) z + 3 - 3\sqrt{3}i$

ما هي طبيعة التحويل S_1oS_2 ؟

الحـــل :

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\sqrt{3} + i = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

نتيجة :
- S_1 تشابه نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{6}$
- S_2 تشابه نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{6}$

إذن : S_1oS_2 هو تشابه نسبته $2 \times \frac{1}{2} = 1$ و زاويته $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$

أي : S_1oS_2 هو انسحاب .

للبحث عن شعاعه نبحث عن صورة نقطة كيفية ليكن المبدأ O .

$$S_1oS_2(0) = S_1[S_2(0)]$$

لدينا : صورة المبدأ بالتشابه S_2 هي النقطة ذات الآحقة $3 - 3\sqrt{3}i$ و صورة النقطة ذات الآحقة $3 - 3\sqrt{3}i$ بالتحويل S_1 هي النقطة ذات الآحقة :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)(3 - 3\sqrt{3}i) + 3i = 3\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4}i - \frac{3}{4}i - 3\frac{\sqrt{3}}{4} - 3i$$

$$= 0$$

منه : $S_1 o S_2(0) = 0$ أي شعاع الإنسحاب معدوم .

نتيجة : S_1oS_2 هو تحويل حيادي للمستوي (التحويل المطابق) .

تعيين تشابه مباشر علم مركزه و زاويته و نسبته

ليكن S تشابه مباشر مركزه w و زاويته θ و نسبته k حيث $k \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

❖ من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن w فإن :

$S(M) = M'$ يكافئ $\begin{cases} wM' = K\,wM \\ (\overrightarrow{wM} ; \overrightarrow{wM'}) = \theta \end{cases}$

❖ $S(w) = w$

نشاط :

A ، B ، C ، D نقط لواحقها على الترتيب 1 ؛ $-3-5i$ ؛ $-4+5i$ ؛ -3

عين التشابه الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D ثم عين عناصره المميزة .

الحـــل :

ليكن S التشابه المطلوب

الكتابة المركبة لـــ S هي $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(1) + \beta = -3 - 5i \,......... (1) \\ \alpha(-4 + 5i) + \beta = -3 \,....... (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha - \alpha(-4 + 5i) = -3 - 5i + 3$

أي $\alpha(1 + 4 - 5i) = -5i$

أي $\alpha = \frac{-5i}{5 - 5i}$

أي $\alpha = \frac{-i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i}$

أي $\alpha = \frac{-i+1}{2}$

أي $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

بالتعويض في (1) : $\beta = -3 - 5i - \alpha$ إذن : $\beta = -3 - 5i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

أي : $\beta = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$

نتيجة : عبارة S المطلوبة هي : $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$

العناصر الهندسية :

$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : نسبة التشابه هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{-\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{-\pi}{4}$

$\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{-7-9i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = -8 - i$ إذن : المركز هو $w(-8\,;-1)$

نشاط (2)

A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب i ؛ $-2+3i$ ؛ $-4+5i$

عين التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول C إلى B

<u>الحـل :</u>

ليكن S التشابه المطلوب .

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

A مركز التشابه إذن : $S(A) = A$

$\begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i) + \beta = i \text{ .... } (1) \\ \alpha(-4+5i) + \beta = -2+3i \text{ .... } (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i + 4 - 5i) = i + 2 - 3i$

أي : $\alpha = \frac{2-2i}{4-4i}$

أي : $\alpha = \frac{2(1-i)}{4(1-i)}$

أي $\alpha = \frac{1}{2}$

بالتعويض في (1) : $\beta = i - i\alpha$ إذن : $\beta = i - \frac{1}{2}i$ أي : $\beta = \frac{1}{2}i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$

ملاحظة : $\alpha \in IR^*$ إذن : α تحاكي .

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين ننسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

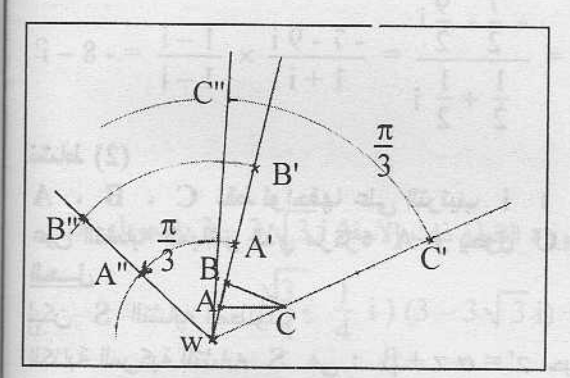
التمرين ــ 1

ABC مثلث كيفي . w نقطة من المستوي .

1 ــ أنشئ النقط 'A ، 'B ، 'C صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحاكي الذي مركزه w و نسبته 3

2 ــ أنشئ النقط ''A ، ''B ، ''C صور النقط 'A ، 'B ، 'C على الترتيب بالدوران الذي مركزه w و زاويته $\frac{\pi}{3}$

3 ــ برهن أن $\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$



الحــل ــ 1

1 ــ الانشاء :

$\overrightarrow{wA'} = 3\,\overrightarrow{wA}$

$\overrightarrow{wB'} = 3\,\overrightarrow{wB}$

$\overrightarrow{wC'} = 3\,\overrightarrow{wC}$

3 ــ ليكن H التحاكي الذي مركزه w و نسبته 3

و ليكن R الدوران الذي مركزه w و زاويته $\frac{\pi}{3}$

إذن : RoH هو التشابه الذي مركزه w و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع S = RoH إذن :
$$\begin{cases} S(A) = RoH(A) = R[H(A)] = R[A'] = A'' \\ S(B) = RoH(B) = R[H(B)] = R[B'] = B'' \\ S(C) = RoH(C) = R[H(C)] = R[C'] = C'' \end{cases}$$

منه حسب خواص التشابه : $\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$

التمرين ــ 2

نرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة 'M ذات اللاحقة 'z حيث $z' = (1+i)\,z + 4$

نعتبر النقطتين M و N صورتهما على الترتيب 'M و 'N

1 ــ بين أن النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ ثابتة من أجل M لا تنطبق على N

2 ــ بين أن توجد نقطة وحيدة A تنطبق على صورتها .

3 ــ أحسب $\frac{AM'}{AM}$ و كذا الزاوية $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AM'})$ من أجل M لا تنطبق على A

4 ــ لتكن النقط B ، C ، D صورها على الترتيب 'B ، 'C ، 'D . برهن أن المثلثان BCD و 'B'C'D متشابهان .

الحــل ــ 2

ليكن S التحويل النقطي الذي عبارته المركبة $z' = (1+i)\,z + 4$

1 ــ لدينا : $\begin{cases} |1+i| = \sqrt{2} \\ Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

إذن : S هو تشابه مباشر للمستوي زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\sqrt{2}$

بما أن $\left.\begin{matrix} M' = S(M) \\ N' = S(N) \end{matrix}\right\}$ وإن $\frac{M'N'}{MN} = \sqrt{2}$ (نسبة ثابتة)

ملاحظة : يمكن إثبات هذا بطريقة أخرى كمايلي :

ليكن $\left.\begin{matrix} z \text{ لاحقة } M \\ t \text{ لاحقة } N \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} (1+i)\,z+4 \text{ هي لاحقة } M' \\ (1+i)\,t+4 \text{ هي لاحقة } N' \end{matrix}\right\}$

من أجل $M \neq N$ لدينا : $\frac{M'N'}{MN} = \frac{|(1+i)\,t + 4 - (1+i)\,z - 4|}{|t - z|}$

$$= \frac{|(1+i)(t-z)|}{|t-z|}$$

$$= \frac{|1+i|\,|t-z|}{|t-z|}$$

$$= |1+i|$$

$= \sqrt{2}$ إذن : $\frac{M'N'}{MN}$ ثابت .

2 ـــ لتكن A ذات اللاحقة z

$S(A) = A$ يكافئ $z' = z$

يكافئ $(1+i)\,z + 4 = z$

يكافئ $i\,z = -4$

يكافئ $z = \frac{-4}{i}$

يكافئ $z = 4\,i$

نتيجة : توجد نقطة وحيدة A لاحقتها $4\,i$ حيث صورتها تنطبق على نفسها

إذن : $A(0\,;\,4)$ هي مركز التشابه S .

3 ـــ $\left.\begin{matrix} M' = S(M) \\ A = S(A) \end{matrix}\right\}$ إذن: $\left\{\begin{matrix} \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2} \text{ (نسبة التشابه)} \\ (\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4} \text{ (زاوية التشابه)} \end{matrix}\right.$

4 ـــ $\left.\begin{matrix} B' = S(B) \\ C' = S(C) \\ D' = S(D) \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{matrix} \frac{B'C'}{BC} = \sqrt{2} \\ \frac{B'D'}{BD} = \sqrt{2} \\ \frac{C'D'}{CD} = \sqrt{2} \end{matrix}\right.$

إذن : المثلثان BDC و $B'C'D'$ متشابهان .

<u>التمرين ـــ 3</u>

T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب : $z' = 2\,i\,z + 3$

لتكن A ، B ، C نقط ،واحقها على الترتيب i ؛ 2 ؛ $1 - i$

1 ـــ عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل T .

2 ـــ عين لاحقة النقطة D حيث $T(D) = A$

3 ـــ برهن أن $\frac{A'E'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$

4 ـــ أحسب $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'})$

<u>الحل ـــ 3</u>

1 ـــ $2\,i(i) + 3 = 3 - 2 = 1$ إذن : لاحقة A' هي 1

$2\,i(2) + 3 = 3 + 4\,i$ إذن : لاحقة B' هي $3 + 4\,i$

$2\,i(1-i)+3 = 2\,i+2+3 = 5+2\,i$ إذن : لاحقة C' هي $5+2\,i$

2 ــ لتكن z لاحقة النقطة D

$T(D) = A$ يكافئ $2\,i\,z+3 = i$

يكافئ $z = \dfrac{-3+i}{2\,i}$

يكافئ $z = \dfrac{-3+i}{2\,i} \times \dfrac{-2\,i}{-2\,i}$

يكافئ $z = \dfrac{6\,i+2}{4}$

يكافئ $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$

نتيجة : لاحقة النقطة D هي $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$

3 ــ لدينا : $\begin{cases} |2\,i| = 2 \\ Arg(2\,i) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ إذن : T هو تشابه مباشر زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و نسبته 2

بما أن $\begin{cases} A' = T(A) \\ B' = T(B) \\ C' = T(C) \end{cases}$ فإن : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

منه : $A'B' \times AC = A'C' \times AB$

إذن : $\dfrac{A'B'}{A'C'} = \dfrac{AB}{AC}$

4 ــ $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}) = Arg\left(\dfrac{3+4\,i-1}{2-i}\right)$

$= Arg\left(\dfrac{2+4\,i}{2-i}\right)$

$= Arg\left(\dfrac{2+4\,i}{2-i} \times \dfrac{2+i}{2+i}\right)$

$= Arg\left(\dfrac{4+2\,i+8\,i-4}{4+1}\right)$

$= Arg(2\,i)$

$= \dfrac{\pi}{2}$

ملاحظة : يمكن الاجابة مباشرة أن $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'})$ هي زاوية التشابه

<u>التمرين ــ 4</u>

A نقطة من المستوي لاحقتها 1 . H التحاكي الذي مركزه A و نسبته -2

R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

1 ــ أكتب العبارة المركبة لكل من H ؛ R ؛ RoH ؛ HoR

2 ــ هل $RoH = HoR$ ؟

<u>الحـل ــ 4</u>

1 ــ عبارة H : $z' = -2\,z+\beta$ حيث $\dfrac{\beta}{1+2} = 1$ منه $\beta = 3$

إذن : عبارة H هي $z' = -2\,z+3$

عبارة R : $z' = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)z+\beta$ حيث $\dfrac{\beta}{1-\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)} = 1$

منه : $z' = i\,z+\beta$ حيث $\dfrac{\beta}{1-i} = 1$ أي $\beta = 1-i$

إذن : عبارة R هي $z' = iz + 1 - i$

عبارة RoH : $z \xrightarrow{H} -2z+3 \xrightarrow{R} i[-2z+3]+1-i = -2iz+1+2i$

إذن : عبارة RoH هي : $z' = -2iz + 1 + 2i$

عبارة HoR : $z \xrightarrow{R} iz+1-i \xrightarrow{H} -2(iz+1-i)+3 = -2iz+1+2i$

إذن : عبارة RoH هي : $z' = -2iz + 1 + 2i$

2 ـــ من السؤال السابق نلاحظ أن HoR و RoH لهما نفس العبارة المركبة .

إذن : $HoR = RoH$

التمرين ـــ 5

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب 2 و $3 + i$

S هو التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (OA)

T هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$

1 ـــ أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات S ؛ T ؛ SoT ؛ ToS

2 ـــ هل $SoT = ToS$

الحـل ـــ 5

1 ـــ عبارة التناظر S : لدينا : $A(2 ; 0)$ إذن : A تنتمي إلى محور الفواصل

منه : التناظر المحوري بالنسبة إلى (OA) هو التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل منه عبارة S هي : $z' = \overline{z}$

عبارة الانسحاب T : $z' = z + \beta$ حيث β لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

إذن : $\beta = 3 + i - 2 = 1 + i$

منه : عبارة T هي : $z' = z + 1 + i$

عبارة SoT : $z \xrightarrow{T} z+1+i \xrightarrow{S} \overline{z+1+i} = \overline{z} + 1 - i$

إذن: عبارة SoT هي : $z' = \overline{z} + 1 - i$

عبارة ToS : $z \xrightarrow{S} \overline{z} \xrightarrow{T} \overline{z} + 1 + i$

إذن : عبارة ToS هي : $z' = \overline{z} + 1 + i$

2 ـــ حسب السؤال (1) SoT و ToS لهما عبارتان مركبتان مختلفتان .

إذن : $SoT \neq ToS$

التمرين ـــ 6

في كل حالة من الحالات التالية عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S ذو المركز الذي لاحقته z_0 و النسبة k و الزاوية θ

1 ـــ $z_0 = 0$ ؛ $k = 2$ ؛ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

2 ـــ $z_0 = -i$ ؛ $k = \sqrt{2}$ ؛ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3 ـــ $z_0 = 2i$ ؛ $k = \dfrac{1}{2}$ ؛ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

4 ـــ $z_0 = 1 - 2i$ ؛ $k = 1$ ؛ $\theta = \pi$

الحـل ـــ 6

في كل مرة التشابه S عبارته $\begin{cases} z' = \alpha z + \beta \text{ حيث } \dfrac{\beta}{1-\alpha} = z_0 \text{ منه } \beta = z_0(1-\alpha) \\ \alpha = k(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases}$

1 ـــ $z_0 = 0$ ؛ $k = 2$ ؛ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i \\ \beta = 0 \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = 2iz$

2 ـ $z_0 = -i$ ؛ $k = \sqrt{2}$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{4}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i \\ \beta = -i(1 - 1 - i) = -1 \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = (1 + i)z - 1$

3 ـ $z_0 = 2i$ ؛ $k = \frac{1}{2}$ ؛ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i\sin 3\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}i \\ \beta = 2i\left(1 + \frac{1}{2}i\right) = 2i - 1 \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = -\frac{1}{2}iz - 1 + 2i$

4 ـ $z_0 = 1 - 2i$ ؛ $k = 1$ ؛ $\theta = \pi$

إذن : $\begin{cases} \alpha = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1 \\ \beta = (1 - 2i)(1 + 1) = 2 - 4i \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = -z + 2 - 4i$

التمرين ـ 7

عين الدالة المركبة S للمتغير z التي تعرف التشابه المباشر في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ المركز هو المبدأ $O(0 ; 0)$ ؛ النسبة $2\sqrt{2}$ ؛ الزاوية $\frac{\pi}{4}$

2 ـ المركز $w(1 ; 2)$ ؛ النسبة 3 ؛ الزاوية $\frac{2\pi}{3}$

الحـل ـ 7

بنفس طريقة التمرين السابق نسمي z_0 لاحقة المركز w و نضع $S(z) = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = k(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \beta = z_0(1 - \alpha) \end{cases}$

1 ـ $z_0 = 0$ ؛ $k = 2\sqrt{2}$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{4}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2i \\ \beta = 0 \end{cases}$

منه : $S(z) = (2 + 2i)z$

2 ـ $z_0 = 1 + 2i$ ؛ $k = 3$ ؛ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{cases} \alpha = 3\left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ \beta = \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + 2i) = \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{3}i)(1 + 2i) = \frac{1}{2}[5 + 6\sqrt{3} + i(10 - 3\sqrt{3})] \end{cases}$$

منه : $S(z) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{5 + 6\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{10 - 3\sqrt{3}}{2}$

التمرين ـ 8

T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(x ; y)$ من المستوي النقطة $M'(x' ; y')$ من المستوي حيث

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1 ـ عين الشكل المركب للتحويل T

2 ـ تعرف على طبيعة التحويل T و عناصره الهندسية المميزة .

الحـل ـ 8

1 ـ نضع $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

إذن : $x' + i\,y' = x - y + i(x + y - 1)$

أي : $x' + i\,y' = x - y + i\,x + i\,y - i$

أي $x' + i\,y' = x + i\,y + i(x + i\,y) - i$

أي $x' + i\,y' = (x + i\,y)(1 + i) - i$

منه : $z' = (1 + i)\,z - i$

2 ـ التحويل T من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$ حيث $\begin{cases}\alpha = 1 + i\\ \beta = -i\end{cases}$

إذن : T هو تشابه مباشر و عناصره الهندسية كمايلي :

المركز : $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-i}{-i} = 1$ إذن : المركز هو $w(1\,;0)$

النسبة : $|\alpha| = |1 + i| = \sqrt{2}$ إذن : النسبة هي $\sqrt{2}$

الزاوية : $Arg(\alpha) = Arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ إذن : الزاوية هي $\frac{\pi}{4}$

التمرين ـ 9

نقبل أن كل تشابه مباشر للمستوي له كتابة مركبة من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$ حيث α و β عددين مركبين و $\alpha \neq 0$

لتكن A ، B ، C ؛ D نقط من المستوي حيث A و B متمايزتان .

برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول A إلى C و B إلى D

الحـل ـ 9

1 ـ ليكن $z' = \alpha\,z + \beta$ عبارة التشابه S إذا وجد حيث $\alpha \in C$ و $\beta \in C$ و $\alpha \neq 0$

نعتبر الأعداد z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب .

$\begin{cases}S(A) = C\\ S(B) = D\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha\,z_A + \beta = z_C \;......\;(1)\\ \alpha\,z_B + \beta = z_D\;......\;(2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha\,z_A - \alpha\,z_B = z_C - z_D$

منه : $\alpha(z_A - z_B) = z_C - z_D$

إذن : $\alpha = \frac{z_C - z_D}{z_A - z_B}$ لأن $z_A \neq z_B$

بالتعويض في (1) : $\beta = z_C - \alpha\,z_A$

إذن : $\beta = z_C - \frac{z_C - z_D}{z_A - z_B}\,z_A$

نتيجة : يوجد تشابه وحيد S يحقق $S(A) = C$ و $S(B) = D$ لأن α و β وحيدين .

التمرين ـ 10

لتكن النقط $A(1\,;0)$ ؛ $A'(-3\,;-3)$ ؛ $B(-4\,;5)$ ؛ $B'(-3\,;0)$

1 ـ أعط العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى 'A و يحول B إلى 'B

2 ـ ما هي العناصر الهندسية للتشابه S

3 ـ عين احداثيي 'C صورة النقطة $C(-1\,;5)$ بالتشابه S

الحـل ـ10

1 ـ لتكن $z' = \alpha\,z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases}S(A) = A'\\ S(B) = B'\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha(1) + \beta = -3 - 5\,i \;.........\;(1)\\ \alpha(-4 + 5\,i) + \beta = -3\;.......\;(2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha - \alpha(-4 + 5\,i) = -3 - 5\,i + 3$

أي $\alpha(1 + 4 - 5\,i) = -5\,i$

أي $\alpha = \frac{-5\,i}{5 - 5\,i}$

أي $\alpha = \frac{-i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

أي $\alpha = \frac{-i+1}{1+1}$

أي $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

بالتعويض في (1) : $\beta = -3 - 5i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$

نتيجة : عبارة S هي : $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$

2 ــ العناصر الهندسية :

المركز : $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2} i}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i} = \frac{-7-9i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = -8 - i$ إذن : المركز هو $w(-8\,;-1)$

النسبة : $|\alpha| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : النسبة هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $\text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \frac{-\pi}{4}$ إذن : الزاوية هي $\frac{-\pi}{4}$

3 ــ من أجل $z = -1 + 5i$ فإن :

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right)(-1 + 5i) - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} i + \frac{1}{2} i + \frac{5}{2} - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} i$$

منه : $C'\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$

<u>التمرين ــ 11</u>

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = iz + 1 - i$

(d) مستقيم معادلته $y = x + 5$

عين معادلة المستقيم (d') صورة المستقيم (d) بالتشابه S

<u>الحــل ــ 11</u>

للبحث عن معادلة (d') يمكن اتباع طريقتين مختلفتين كمايلي :

الطريقة الأولى : نأخذ نقطتين متمايزتين A و B من (d)

مثلا : $A(0\,;5)$ ؛ $B(-5\,;0)$

نبحث عن A' و B' حيث $A' = S(A)$ ؛ $B' = S(B)$

من أجل $z = 5i$ لدينا : $z' = i(5i) + 1 - i = -5 + 1 - i = -4 - i$

إذن : $A'(-4\,;-1)$

من أجل $z = -5$ لدينا : $z' = i(-5) + 1 - i = -5i + 1 - i = 1 - 6i$

إذن : $B'(1\,;-6)$

نتيجة : معادلة (d') هي معادلة المستقيم (A'B') كمايلي :

$N(x\,;y) \in (d')$ يكافئ $\begin{vmatrix} x+4 & 1+4 \\ y+1 & -6+1 \end{vmatrix} = 0$

يكافئ $-5(x+4) = 5(y+1)$

يكافئ $-x - 4 = y + 1$

يكافئ $y = -x - 5$ و هي معادلة (d')

الطريقة الثانية : نبحث عن z بدلالة z' كمايلي :

$z' = i\,z + 1 - i$ يكافئ $i\,z = z' - 1 + i$

يكافئ $z = \dfrac{z' - 1 + i}{i}$

يكافئ $z = \dfrac{z' - 1 + i}{i} \times \dfrac{-i}{-i}$

يكافئ $z = -i\,z' + 1 + i$

ليكن $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

لدينا : $z = -i\,z' + 1 + i$

إذن : $x + i\,y = -i(x' + i\,y') + 1 + i$

أي $x + i\,y = -i\,x' + y' + 1 + i$

أي $x + i\,y = y' + 1 + i(1 - x')$

منه $\begin{cases} x = y' + 1 \\ y = 1 - x' \end{cases}$

(d) له المعادلة $y = x + 5$

منه (d') له المعادلة $1 - x' = y' + 1 + 5$ (بتعويض x و y بدلالة x' و y')

أي $-x' = y' + 5$

أي $y' = -x' - 5$

أي معادلة (d') هي $y = -x - 5$

التمرين – 12

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = (i + 1)\,z + 2 - i$

(C_1) دائرة مركزها O و نصف قطرها 4

(C_2) دائرة مركزها $w(2\,;\,2)$ و نصف قطرها 3

1 – عين (C'_1) صورة الدائرة (C_1) بـ التشابه S

2 – عين (C'_2) صورة الدائرة (C_2) بـ التشابه S

الحل – 12

من خواص التشابه S أنه يحول دائرة ذات المركز w و نصف القطر α إلى دائرة مركزها S(w) و نصف قطرها kα حيث k هي نسبة التشابه .

إذن :

1 – صورة المبدأ O هي : $w(2\,;\,-1)$

نسبة التشابه S هي : $|i + 1| = \sqrt{2}$

إذن : نصف قطر الدائرة (C'_1) هو $4\sqrt{2}$

منه : معادلة (C'_1) : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2})^2$

أي : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 + 1 = 32$

أي : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 27 = 0$

2 – صورة النقطة $w(2\,;\,2)$: $(i + 1)(2 + 2i) + 2 - i = 4i + 2 - i = 2 + 3i$

إذن : صورة w هي $w'(2\,;\,3)$

منه : معادلة (C'_2) : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (3\sqrt{2})^2$

أي : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 = 18$

أي : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ و هي معادلة (C'_2) .

التمرين – 13

T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = \alpha\,z + \alpha$ حيث α عدد مركب غير معدوم

1 – عين α حتى يكون T انسحابا ثم عين شعاعه .

2 – عين α حتى يكون T دورانا زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ ثم أوجد مركزه .

3 – عين α حتى يكون T تحاكي نسبته 3- ثم عين مركزه .

4 ــ عين الطبيعة و العناصر الهندسية للتحويل T من أجل $\alpha = -1 - i$

الحـل ــ 13

1 ــ T انسحاب إذا وفقط إذا كان $\alpha = 1$

إذن : عبارة الانسحاب T : $z' = z + 1$

منه : شعاع الانسحاب هو $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2 ــ T دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

أي $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : عبارة الدوران T هي : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

منه عناصره :

المركز : $\frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \times \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

إذن : المركز هو $w\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3 ــ T تحاكي نسبته 3 - إذا وفقط إذا كان $\alpha = -3$

منه عبارة التحاكي T : $z' = -3z - 3$

المركز : $\frac{-3}{1+3} = -\frac{3}{4}$

إذن : مركز التحاكي هو $w\left(-\frac{3}{4} ; 0\right)$

4 ــ $\alpha = -1 - i$ إذن : $\begin{cases} |\alpha| = \sqrt{2} \\ Arg(\alpha) = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

$\frac{-1-i}{1+1+i} = \frac{-1-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-2+i-2i-1}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

إذن : T تشابه مباشر مركزه $w\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{1}{5}\right)$ و زاويته $\frac{5\pi}{4}$ و نسبته $\sqrt{2}$

التمرين ــ 14

ABCD مربع مركزه P حيث AB = 8 cm و $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

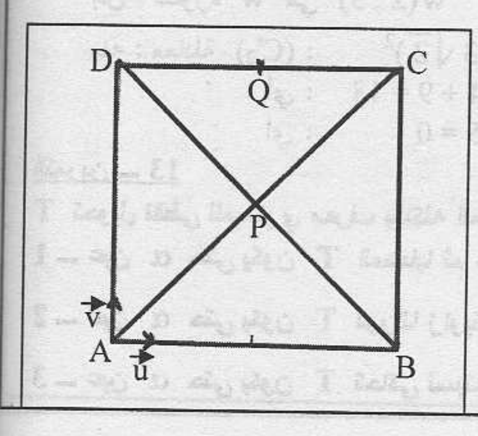
Q هو منتصف [CD] و S هو التشابه المباشر حيث S(A) = P و S(C) = Q

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث $\overrightarrow{AB} = 8\vec{u}$ و $\overrightarrow{AD} = 8\vec{v}$

1 ــ عين لواحق النقط A ، C ، Q ، P

2 ــ أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم استنتج زاويته θ و نسبته k

3 ــ عين لاحقة w مركز التشابه S .



الحـل ــ 14

1 ــ باعتبار المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ فان احداثيات النقط A ، C ، P ، Q

هي كما يلي : A(0 ; 0) ؛ C(8 ; 8) ؛ P(4 ; 4) ؛ Q(4 ; 8)

منه لواحق النقط A ، C ، P ، Q هي على الترتيب :

0 ؛ 8 + 8 i ؛ 4 + 4 i ؛ 4 + 8 i

2 ــ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = P \\ S(C) = Q \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \alpha(0) + \beta = 4 + 4i \text{ .... (1)} \\ \alpha(8 + 8i) + \beta = 4 + 8i \text{ .... (2)} \end{cases}$

من (1) : $\beta = 4 + 4i$

بالتعويض في (2) : $\alpha = \dfrac{4 + 8i - (4 + 4i)}{8 + 8i}$

أي $\alpha = \dfrac{4i}{8(1+i)}$

أي $\alpha = \dfrac{i}{2(1+i)} \times \dfrac{1-i}{1-i}$

أي $\alpha = \dfrac{i+1}{4}$

أي $\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\right) z + 4 + 4i$

و عناصره الهندسية :

النسبة : $\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\right| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ إذن : $k = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

الزاوية : $\text{Arg}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\right) = \frac{\pi}{4}$ إذن : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3 ــ لاحقة w مركز التشابه :

$$\frac{4 + 4i}{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i} = \frac{4(1+i)}{\frac{1}{4}(3 - i)} = \frac{16(1+i)}{3 - i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{16}{4}(3 + i + 3i - 1) = 4(2 + 4i)$$

إذن : لاحقة المركز w هي $8 + 16i$ منه $w(8 ; 16)$

التمرين ــ15

1 ــ أعط العناصر المميزة للتشابه f المعرف بشكله المركب : $z' = (1 - i) z + 2 - i$

2 ــ في كل حالة من الحالات التالية عين التشابه S حيث foS يكون :

أ . تحاكي مركزه O و نسبته $\frac{1}{2}$

ب . انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

الحــل ــ15

1 ــ $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه f هي $\sqrt{2}$

$\text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه f هي $\frac{-\pi}{4}$

$\dfrac{2 - i}{1 - 1 + i} = \dfrac{2 - i}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = -1 - 2i$ إذن : مركز التشابه f هو $w(-1 ; -2)$

2 ــ ليكن S تشابه شكله المركب $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

$$z \xrightarrow{S} \alpha z + \beta \xrightarrow{f} (1 - i)(\alpha z + \beta) + 2 - i = \alpha(1 - i) z + \beta(1 - i) + 2 - i$$

إذن : العبارة المركبة للتشابه foS هي :

$$z' = \alpha(1 - i) z + \beta(1 - i) + 2 - i$$

أ ــ ليكن H التحاكي ذو المركز O و النسبة $\frac{1}{2}$ إذن العبارة المركبة لــ H هي : $z = \frac{1}{2} z$

بالمطابقة مع عبارة التشابه foS نحصل على : $\begin{cases} \alpha(1 - i) = 1/2 \\ \beta(1 - i) + 2 - i = 0 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2(1 - i)} \\ \beta = \dfrac{-2 + i}{1 - i} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2(1 - i)} \times \dfrac{1+i}{1+i} \\ \beta = \dfrac{-2 + i}{1 - i} \times \dfrac{1+i}{1+i} \end{cases}$

أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\,i \\ \beta = \dfrac{-2-2\,i+i-1}{2}\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\,i \\ \beta = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\end{array}\right.$

نتيجة : عبارة التشابه S المطلوبة هي : $z' = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\,i\right) z - \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$

ب ــ ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ إذن العبارة المركبة لــ T هي : $z' = z + 1 - i$

بالمطابقة مع عبارة foS نحصل على $\left\{\begin{array}{l}\alpha(1-i) = 1 \\ \beta(1-i) + 2 - i = 1 - i\end{array}\right.$

إذن : $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{1}{1-i} \\ \beta = \dfrac{1-i-2+i}{1-i}\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{1}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} \\ \beta = \dfrac{-1}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i}\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,i \\ \beta = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\end{array}\right.$

نتيجة : عبارة التشابه S المطلوبة هي $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right) z - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$

التمرين ــ16

S تشابه معرف بالدالة : $z \longmapsto (1+i)\,z + 2$

1 ــ حدد العناصر المميزة للتشابه S و ليكن I مركزه .

2 ــ إذا كان $S(M) = M'$ فما هي طبيعة المثلث IMM'

3 ــ ما هي مجموعة النقط E من المستوي حتى يكون $OM = OM'$

4 ــ ما هي مجموعة النقط F من المستوي حتى يكون $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$ ؟

الحــل ــ 16

1 ــ $|1+i| = \sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$\text{Arg}(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{2}{1-1-i} = \dfrac{2}{-i} \times \dfrac{i}{i} = 2\,i$ إذن : مركز التشابه S هو $I(0\,;\,2)$

2 ــ ليكن $M' = S(M)$ إذن : $\left\{\begin{array}{l}IM' = \sqrt{2}\,IM \\ (\overrightarrow{IM}\,;\,\overrightarrow{IM'}) = \dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.$

في المثلث IMM' لدينا : $\dfrac{IM}{IM'} = \dfrac{IM}{\sqrt{2}\,IM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

إذن : المثلث IMM' قائم الزاوية في M

منه حسب فيثاغورث : $IM'^2 = IM^2 + MM'^2$

أي : $2\,IM^2 = IM^2 + MM'^2$ لأن $IM'^2 = (\sqrt{2}\,IM)^2$

أي : $MM'^2 = IM^2$

أي : $MM' = IM$

إذن : المثلث IMM' متساوي الساقين .

نتيجة : المثلث IMM' متساوي الساقين و قائم الزاوية في M

3 ــ ليكن $M(x\,;\,y)$

لدينا : $z' = (1+i)\,z + 2$

إذن : $z' = (1+i)(x+i\,y) + 2$

أي : $z' = x + i\,y + i\,x - y + 2$

أي : $z' = (x - y + 2) + i(x + y)$

إذن : $OM = OM'$ يكافئ $|z| = |z'|$

يكافئ $|z|^2 = |z'|^2$

يكافئ $x^2 + y^2 = (x - y + 2)^2 + (x + y)^2$

يكافئ $x^2 + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4(x - y) + 4 + x^2 + 2xy + y^2$

يكافئ $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

يكافئ $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

إذن : E هي الدائرة التي مركزها $w(-2 ; 2)$ و نصف قطرها 2

4 ــ لتكن $M(x ; y)$ إذن : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x - y + 2 \\ x + y \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$ يكافئ $x(x - y + 2) + y(x + y) = 0$

يكافئ $x^2 - xy + 2x + xy + y^2 = 0$

يكافئ $x^2 + y^2 + 2x = 0$

يكافئ $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

إذن : F هي الدائرة التي مركزها $A(-1 ; 0)$ و نصف قطرها 1

التمرين ــ 17

لتكن M و M' نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$
حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .
نفرض أن الثنائية $(x' ; y')$ مرتبطة بالثنائية $(x ; y)$ بالعلاقتين التاليتين $x' = -3x + 3y + 10$ و $y' = -3x - 3y + 5$
عبر عن z' بدلالة z ثم تعرف على التحويل النقطي المرفق .

الحــل ــ 17

$$\begin{aligned} x' + iy' &= -3x + 3y + 10 + i(-3x - 3y + 5) \\ &= -3x + 3y + 10 - 3ix - 3iy + 5i \\ &= -3(x + iy) - 3i(x + iy) + 10 + 5i \\ &= (x + iy)(-3 - 3i) + 10 + 5i \end{aligned}$$

نتيجة : $x' + iy' = (-3 - 3i)(x + iy) + 10 + 5i$

أي : $z' = (-3 - 3i)z + 10 + 5i$ و هي عبارة z' بدلالة z

التحويل المرفق : من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = -3 - 3i \\ \beta = 10 + 5i \end{cases}$

إذن : التحويل عبارة عن تشابه مباشر .

و عناصره الهندسية كمايلي :

$|-3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه هي $3\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg}(-3 - 3i) = \frac{5\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{5\pi}{4}$

$\frac{10 + 5i}{1 + 3 + 3i} = \frac{10 + 5i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i} = \frac{55 - 10i}{25}$ إذن : مركز التشابه هو $w(11/5 ; -2/5)$

التمرين ــ 18

A نقطة من المستوي لاحقتها $2 + i$. S هو التشابه الذي مركزه A و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{4}$
1 ــ أكتب العبارة المركبة لــ S
2 ــ لتكن $M(x ; y)$ و $M'(x' ; y')$ حيث $M' = S(M)$
عبر عن x' و y' بدلالة x و y
3 ــ أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي صورته بالتشابه S هو المستقيم (D') ذو المعادلة $x = 3$

الحــل ــ 18

1 ــ عبارة S : $z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)z + a$

أي : $z' = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + a$

أي $z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + a$ حيث $2 + i = \dfrac{a}{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

إذن : $a = (2 + i)(1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2})$

$= 2(1 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$

$= 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

نتيجة : عبارة S : $z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

2 ــ $x' + iy' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(x + iy) + 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

$= \sqrt{2}x + i\sqrt{2}y + ix\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

منه : $\begin{cases} x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} \end{cases}$

3 ــ صورة (D) هي (D') ذو المعادلة $x = 3$ أي $x' = 3$

منه : $x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 3$ هي معادلة المستقيم (D)

أي : $y\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$

أي : $y = x - 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ هي معادلة المستقيم (D)

التمرين ــ 19

لتكن النقط : $A(1 ; 1)$ ؛ $B(-2 ; 0)$ ؛ $C(2 ; -1)$ ؛ $D(-4 ; -1)$

حدد التشابه S الذي يرفق بالنقطة A النقطة B و بالنقطة C النقطة D

الحل ــ 19

لتكن $z' = \alpha z + \beta$ العبارة المركبة للتشابه S

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(1 + i) + \beta = -2 \text{ .... } (1) \\ \alpha(2 - i) + \beta = -4 - i \text{ .... } (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(1 + i - 2 + i) = -2 + 4 + i$

أي : $\alpha = \dfrac{2 + i}{-1 + 2i} \times \dfrac{-1 - 2i}{-1 - 2i}$

أي $\alpha = \dfrac{-2 - 4i - i + 2}{1 + 4}$

أي $\alpha = -i$

بالتعويض في (1) : $\beta = -2 + i(1 + i) = -2 + i - 1 = -3 + i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z' = -iz - 3 + i$

العناصر الهندسية لــ S :

النسبة : $|-i| = 1$

الزاوية : $Arg(-i) = \dfrac{3\pi}{2}$

المركز : $\dfrac{-3 + i}{1 + i} = \dfrac{-3 + i}{1 + i} \times \dfrac{1 - i}{1 - i} = \dfrac{-3 + 3i + i + 1}{2} = -1 + 2i$

خلاصة : S هو دوران مركزه $w(-1 ; 2)$ و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$

التمرين ــ 20

لتكن النقط $A(1 ; 0)$ ؛ $B(2 ; 0)$ ؛ $C(1 ; 1)$

1 ــ عين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C

2 ــ ليكن T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = (1 - i)z + 2i$

أ ـ ما هي طبيعة التحويل T

ب ـ ما هي طبيعة المثلث BMM' حيث $M' = T(M)$

الحـل ـ 20

1 ـ $BA = |1 - 2| = 1$

$BC = |1 + i - 2| = \sqrt{2}$

إذن : $BC = \sqrt{2}\, BA$

منه : نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = Arg(1 + i - 2) - Arg(1 - 2) = Arg(-1 + i) - Arg(-1) = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$$

إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$

2 ـ الشكل المركب لـ T : $z' = (1 - i) z + 2i$

$|1 - i| = \sqrt{2}$ إذن : T تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$

العناصر الهندسية لـ التشابه T :

الزاوية : $Arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\frac{2i}{1 - 1 + i} = \frac{2i}{i} = 2$ إذن : المركز هو $B(2 ; 0)$

ب ـ طبيعة المثلث BMM'

B هو مركز التشابه T و $T(M) = M'$ إذن :

$BM' = BM\sqrt{2}$

$(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BM'}) = -\frac{\pi}{4}$ أي $(\overrightarrow{BM'} ; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4}$

في المثلث BMM' لدينا : $\frac{BM}{BM'} = \frac{BM}{\sqrt{2}BM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

إذن : المثلث BMM' قائم الزاوية في M

منه حسب فيثاغورث فإن : $BM'^2 = BM^2 + MM'^2$

أي : $(\sqrt{2}BM)^2 = BM^2 + MM'^2$

أي : $MM'^2 = BM^2$

أي : $MM' = BM$

أي : المثلث BMM' متساوي الساقين

خلاصة : المثلث BMM' قائم الزاوية في M و متساوي الساقين

التمرين ـ 21

A ، B ، C ، D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $1+2i$ ؛ $5+2i$ ؛ $1+4i$ و $2-i$

1 ـ عين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى C و يحول D إلى B ثم عين عناصره الهندسية المميزة

2 ـ لتكن k_0 نقطة من المستوي لاحقتها $3i$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$k_{n+1} = S(k_n)$ و $u_n = \|\overrightarrow{wk_n}\|$ حيث w هو مركز التشابه S

أ ـ أحسب $\|\overrightarrow{wk_n}\|$ بدلالة n

ب ـ ما هي طبيعة المتتالية (u_n)

ج ـ أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

الحـل ـ 21

1 ـ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = C \\ S(D) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(1 + 2i) + \beta = 1 + 4i \text{ .... (1)} \\ \alpha(2 - i) + \beta = 5 + 2i \text{ .... (2)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(1 + 2i - 2 + i) = 1 + 4i - 5 - 2i$

أي : $\alpha(-1 + 3i) = -4 + 2i$

منه : $\alpha = \frac{-4 + 2i}{-1 + 3i} \times \frac{-1 - 3i}{-1 - 3i}$

أي $\alpha = \frac{4 + 12i - 2i + 6}{1 + 9}$

أي $\alpha = 1 + i$

بالتعويض في (1) : $\beta = 1 + 4i - (1 + i)(1 + 2i)$

أي $\beta = 1 + 4i - 1 - 2i - i + 2$

أي $\beta = 2 + i$

نتيجة : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1 + i)z + 2 + i$

و عناصره الهندسية :

النسبة : $|1 + i| = \sqrt{2}$

الزاوية : $Arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

المركز : $\frac{2 + i}{1 - 1 - i} = \frac{2 + i}{-i} \times \frac{i}{i} = -1 + 2i$ إذن المركز هو $w(-1 ; 2)$

2 ـ $k_0(0 ; 3)$

لدينا $\|\overrightarrow{wk_0}\| = |3i + 1 - 2i| = |1 + i| = \sqrt{2}$

من جهة أخرى : $k_{n+1} = S(k_n)$ إذن : $\|\overrightarrow{wk_{n+1}}\| = \sqrt{2}\, \|\overrightarrow{wk_n}\|$

من أجل $n = 0$: $\|\overrightarrow{wk_1}\| = \sqrt{2}\, \|\overrightarrow{wk_0}\|$

من أجل $n = 1$: $\|\overrightarrow{wk_2}\| = \sqrt{2}\, \|\overrightarrow{wk_1}\| = (\sqrt{2})^2 \|\overrightarrow{wk_0}\|$

من أجل $n = 2$: $\|\overrightarrow{wk_3}\| = \sqrt{2}\, \|\overrightarrow{wk_2}\| = (\sqrt{2})^3 \|\overrightarrow{wk_0}\|$

إذن : بصفة عامة من أحل $n > 0$ فإن : $\|\overrightarrow{wk_n}\| = (\sqrt{2})^n \|\overrightarrow{wk_0}\|$

نتيجة : $\|\overrightarrow{wk_n}\| = (\sqrt{2})^{n+1}$ لأن $\|\overrightarrow{wk_0}\| = \sqrt{2}$

ب ـ $u_n = (\sqrt{2})^{n+1}$ إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\sqrt{2}$ و حدها الأول $u_0 = \sqrt{2}$

ج ـ $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^{n+1} = +\infty$

التمرين ـ 22

θ_1 ، θ_2 ، k_1 ، k_2 أعداد حقيقية حيث $k_1 \neq 0$ و $k_2 \neq 0$

1 ـ برهن أن مركب دورانين R_1 و R_2 زاويتاهما على الترتيب θ_1 و θ_2 هو انسحاب أو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$ أو تحاكي نسبته -1.

2 ـ برهن أن مركب تحاكيين H_1 و H_2 نسبتاهما على الترتيب k_1 و k_2 هو انسحاب أو تحاكي نسبته $k_1 \times k_2$

الحل ـ22

1 ـ لتكن $z' = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \beta_1$ عبارة الدوران R_1

و

$z' = (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + \beta_2$ عبارة الدوران R_2

$z \xrightarrow{R_2} (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)z + \beta_2 \xrightarrow{R_1} (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,[(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)z + \beta_2] + \beta_1$

منه عبارة R_1oR_2 هي : $z' = (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z + \beta_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \beta_1$

لدينا : $Arg((\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)) = \theta_1 + \theta_2$ نميز الحالات التالية :

1 ـ إذا كان $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi k$ حيث $k \in Z$ فإن R_1oR_2 هو انسحاب

2 ـ إذا كان $\theta_1 + \theta_2 = (2k + 1)\pi$ حيث $k \in Z$ فإن R_1oR_2 هو تحاكي نسبته -1.

3 ـ إذا كان $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi k$ فإن R_1oR_2 هو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$ لأن :

$|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)| = 1 \times 1 = 1$

2 ـ لتكن $z' = k_1 z + \beta_1$ عبارة التحاكي H_1

و لتكن $z' = k_2 z + \beta_2$ عبارة التحاكي H_2

$$z \xrightarrow{H_2} k_2 z + \beta_2 \xrightarrow{H_1} k_1(k_2 z + \beta_2) + \beta_1 = k_1 k_2 z + k_1 \beta_2 + \beta_1$$

إذن : عبارة $H_1 o H_2$ هي : $z' = k_1 k_2 z + k_1 \beta_2 + \beta_1$

منه نميز الحالات التالية :

1 ــ إذا كان $k_1 \times k_2 = 1$ فإن $H_1 o H_2$ هو انسحاب .

2 ــ إذا كان $k_1 \times k_2 \neq 1$ فإن $H_1 o H_2$ هو تحاكي نسبته $k_1 \times k_2$

التمرين ــ 23

A ، B ، C نقط لواحقها i ، $\sqrt{2}$ ، $i + \sqrt{2}$ على الترتيب

I ، J ، K منتصفات القطع المستقيمة [OB] ، [AC] ، [BC] على الترتيب (O هي مبدأ المعلم)

1 ــ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث $S(A) = I$ و $S(O) = B$

2 ــ ما هي العناصر الهندسية للتشابه S

3 ــ عين صور النقط B ، C ، I بالتشابه S

4 ــ ليكن $S^2 = SoS$. برهن أن S^2 هو تحاكي يطلب تعيين مركزه و نسبته

5 ــ ما هي صور النقط O ، B ، A بالتحويل S^2

6 ــ استنتج أن المستقيمات (OC) ، (BJ) ، (AK) متقاطعة في نقطة واحدة .

الحـل ــ 23

لدينا : $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$ ؛ $J\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right)$ ؛ $K\left(\sqrt{2} ; \frac{1}{2}\right)$

1 ــ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i) + \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ .... (1)} \\ \alpha(0) + \beta = \sqrt{2} \text{ .... (2)} \end{cases}$ لأن لاحقة I هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

من (2) : $\beta = \sqrt{2}$

بالتعويض في (1) : $\alpha = \frac{1}{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)$ أي $\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2i} \times \frac{-i}{-i}$ منه $\alpha = i\frac{\sqrt{2}}{2}$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = i\frac{\sqrt{2}}{2} z + \sqrt{2}$

2 ــ العناصر الهندسية :

النسبة : $\left|i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $\text{Arg}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

المركز :

$$\frac{\sqrt{2}}{1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - i\sqrt{2}} \times \frac{2 + i\sqrt{2}}{2 + i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} + 4i}{6}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i$$

منه المركز هو $w\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

3 ــ من أجل $z = \sqrt{2}$: $i\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}) + \sqrt{2} = \sqrt{2} + i$

إذن : صورة B هي النقطة $C(\sqrt{2} ; 1)$

من أجل $z = i + \sqrt{2}$: $i\frac{\sqrt{2}}{2}(i + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

إذن :صورة C هي النقطة $J\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right)$

من أجل $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} = \frac{1}{2}i + \sqrt{2}$

إذن : صورة I هي النقطة $K\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$

نتيجة : $S(I) = K$ ؛ $S(C) = J$ ؛ $S(B) = C$

4 ـ $z \xmapsto{S} i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \sqrt{2} \xmapsto{S} i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}z + i + \sqrt{2}$

إذن : العبارة المركبة لـ S^2 هي : $z' = -\frac{1}{2}z + i + \sqrt{2}$

منه : S^2 هو تحاكي نسبته $-\frac{1}{2}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة $\frac{i+\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i$

أي مركزه هو مركز التشابه S

5 ـ $O \xmapsto{S} B \xmapsto{S} C$ منه $S^2(O) = C$

$B \xmapsto{S} C \xmapsto{S} J$ منه $S^2(B) = J$

$A \xmapsto{S} I \xmapsto{S} K$ منه $S^2(A) = K$

بما أن S^2 هو تحاكي مركزه $W\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$ و C ، J ، K هي صور O ، B ، A على الترتيب بـ التحاكي S^2 فإن

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{WC} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{WO}\\ \overrightarrow{WJ} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{WB}\\ \overrightarrow{WK} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{WA}\end{aligned}\right\} \text{ منه : } \left\{\begin{aligned}W &\in (OC)\\ W &\in (BJ)\\ W &\in (AK)\end{aligned}\right.$$

إذن : $W \in (OC) \cap (BJ) \cap (AK)$

بما أن O ، B ، A ليست على استقامة واحدة فإن المستقيمات (OC) ، (BJ) و (AK) تتقاطع في نقطة وحيدة هي $w\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$

التمرين ـ 24

A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب 12 و 9 i

f تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = -\frac{3}{4}iz + 9i$

1 ـ برهن أن f يقبل نقطة صامدة وحيدة w احداثياها $w\left(\frac{108}{25}\,;\,\frac{144}{25}\right)$

2 ـ برهن أن f تشابه مباشر زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و نسبته $\frac{3}{4}$. ما هو مركزه ؟

3 ـ عين صور النقط A و O بالتحويل f

4 ـ برهن أن w هي نقطة مشتركة للدائرتين (C_1) و (C_2) ذات القطرين على الترتيب [OA] و [OB]

5 ـ بين أن w هي المسقط العمودي للنقطة O على (AB)

6 ـ بين أن $wA \times wB = wO^2$

الحل ـ 24

1 ـ لتكن w ذات اللاحقة z نقطة من المستوي .

w صامدة بـ f يكافئ $f(w) = w$

يكافئ $z' = z$

يكافئ $-\frac{3}{4}iz + 9i = z$

يكافئ $9i = \left(1 + \frac{3}{4}i\right)z$

يكافئ $9 i = \frac{1}{4}(4 + 3 i) z$

يكافئ $z = \frac{36 i}{4 + 3 i}$

يكافئ $z = \frac{36 i}{4 + 3 i} \times \frac{4 - 3 i}{4 - 3 i}$

يكافئ $z = \frac{144 i + 108}{25}$

يكافئ $z = \frac{108}{25} + \frac{144}{25} i$

إذن : f يقبل نقطة صامدة وحيدة $w\left(\frac{108}{25} ; \frac{144}{25}\right)$

2 ـ f تحويل نقطي من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = -\frac{3}{4} i \\ \beta = 9 i \end{cases}$

بما أن $\begin{cases} Arg(\alpha) = Arg\left(-\frac{3}{4} i\right) = -\frac{\pi}{2} \\ |\alpha| = \left|\frac{3}{4} i\right| = \frac{3}{4} \end{cases}$ فإن f تشابه مباشر نسبته $\frac{3}{4}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

مركز التشابه هو النقطة الصامدة إذن : المركز هو $w\left(\frac{108}{25} ; \frac{144}{25}\right)$

3 ـ $z = 0$ إذن : $z' = -\frac{3}{4} i(0) + 9i = 9 i$

منه : صورة O هي النقطة $B(0 ; 9)$

$z = 12$ إذن : $z' = -\frac{3}{4} i(12) + 9 i = -9 i + 9 i = 0$

منه : صورة A هي المبدأ $O(0 ; 0)$

4 ـ ليكن w_1 مركز الدائرة (C_1) إذن : w_1 هي منتصف [OA] منه $w_1(6 ; 0)$

و ليكن w_2 مركز الدائرة (C_2) إذن : w_2 هي منتصف [OB] منه $w_2(0 ; 9/2)$

إذن : نصف قطر الدائرة (C_1) هو 6 و نصف قطر الدائرة (C_2) هو 9/2

لدينا : $\begin{cases} w_1w = \left|\frac{108}{25} + \frac{144}{25} i - 6\right| = \left|\frac{-42}{25} + \frac{144}{25} i\right| = \frac{6}{25}|-7 + 24 i| = \frac{6}{25}\sqrt{625} = 6 \\ w_2w = \left|\frac{108}{25} + \frac{144}{25} i - \frac{9}{2} i\right| = \left|\frac{108}{25} + \frac{63}{50} i\right| = \left|\frac{216}{50} + \frac{63}{50} i\right| = \frac{9}{50}|24 + 7 i| = \frac{9 \times 25}{50} = \frac{9}{2} \end{cases}$

نتيجة : $w \in (C_1)$ و $w \in (C_2)$ إذن : $w \in (C_1) \cap (C_2)$

5 ـ $\begin{cases} f(O) = B \\ f(A) = O \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (\overrightarrow{WO} ; \overrightarrow{WB}) = -\frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{WA} ; \overrightarrow{WO}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

منه : $(\overrightarrow{WA} ; \overrightarrow{WB}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

إذن : النقط W ، A ، B على استقامة واحدة

منه : W هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

6 ـ $\begin{cases} f(O) = B \\ f(A) = O \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} WB = \frac{3}{4} WO \\ WO = \frac{3}{4} WA \end{cases}$

$\frac{WB}{WO}$ $\frac{WO}{WA}$

منه : =

أي : $WB \times WA = WO^2$ و هو المطلوب

التمرين ــ 25

ABCD مستطيل حيث $AB = \sqrt{2}$ ؛ $AD = 1$ ؛ $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

I منتصف [AB]

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

1 ــ عين العددين α و β حيث $S(D) = C$ و $S(C) = B$

ليكن T التشابه المباشر الذي عبارته المركبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

2 ــ عين نسبة و زاوية التشابه T

3 ــ بين أن التشابه T يحول B إلى I

4 ــ بين أن المستقيمين (BD) و (CI) متعامدان .

الحـل ــ 25

1 ــ باعتبار المعلم المتعامد و المجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ فإن :

$A(0 ; 0)$ ؛ $B(\sqrt{2} ; 0)$ ؛ $D(0 ; 1)$ ؛ $C(\sqrt{2} ; 1)$ ؛ $I(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0)$

$\begin{cases} S(D) = C \\ S(C) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i) + \beta = \sqrt{2} + i \text{ .... } (1) \\ \alpha(\sqrt{2} + i) + \beta = \sqrt{2} \text{ .... } (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i - \sqrt{2} - i) = \sqrt{2} + i - \sqrt{2}$

أي $-\alpha\sqrt{2} = i$

أي $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} i$

أي $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} i$

بالتعويض في (1) : $\beta = \sqrt{2} + i - i(-\frac{\sqrt{2}}{2} i) = \sqrt{2} + i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

2 ــ عبارة التشابه T : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

$\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : نسبة التشابه T هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{-\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه T هي $\frac{-\pi}{2}$

3 ــ من أجل $z = \sqrt{2}$ لدينا : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : صورة B بـ التشابه T هي النقطة $I(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0)$

4 ــ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{BD} . \overrightarrow{CI} = -\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1)(1) = 1 - 1 = 0$

إذن : المستقيمين (BD) و (CI) متعامدين .

التمرين ــ 26

f تحويل نقطي معرف بشكله المركب $z' = (1 + i\sqrt{3})\, z - i\sqrt{3}$

1 ــ ما هي طبيعة التحويل f و ما هي عناصره المميزة ؟

2 ــ ما هي الصورة بالتحويل f للدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2

الحــل ــ 26

1 ــ f من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = 1 + i\sqrt{3} \\ \beta = -i\sqrt{3} \end{cases}$ إذن : f تشابه .

$|\alpha| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ إذن : نسبة التشابه f هي 2

$\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \text{Arg}\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ إذن : زاوية التشابه f هي $\frac{\pi}{3}$

$\frac{-i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1$ إذن : مركز التشابه f هو $A(1 ; 0)$

2 ــ صورة النقطة O هي النقطة $w(0 ; -\sqrt{3})$

إذن : صورة الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2 هي الدائرة ذات المركز w

و نصف القطر 2×2 لأن النسبة هي 2

إذن : معادلة صورة الدائرة المطلوبة هي : $x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 16$

أي : $x^2 + y^2 + 2y\sqrt{3} - 13 = 0$

التمرين ــ 27

S تشابه مباشر مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$

لتكن M' صورة M و N صورة M' بالتشابه S

ليكن H المسقط العمودي للنقطة M على (AM')

برهن أن $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$

الحــل ــ 27

1 ــ $\begin{cases} A \text{ مركز التشابه} \\ S(M) = M' \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ نسبة التشابه} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} AM' = \frac{\sqrt{2}}{2} AM \\ (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AM'}) = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

H مسقط عمودي لــ M على (AM') إذن : $(\overrightarrow{AH} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$

إذن : في المثلث القائم HMA لدينا : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AH}{AM}$

منه : $AH = AM\cos\frac{\pi}{4}$

أي : $AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$

أي $AH = AM'$ لأن $\frac{\sqrt{2}}{2} AM = AM'$

نتيجة : $\begin{cases} (\overrightarrow{AH} ; \overrightarrow{AM'}) = \pi \\ AH = AM' \end{cases}$ إذن : A هي منتصف [M'H]

أي : $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$

تمارين نماذج للباكالوريا

التمرين ــ 1

1 ــ عين المجموعة (C) من النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق :

$$|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i|=4$$

2 ــ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول النقطة A ذات اللاحقة i إلى المبدأ O و يحول النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى 'B ذات اللاحقة $-4i$

3 ــ حدد العناصر الهندسية للتشابه S

4 ــ باستعمال نتائج السؤالين (2) و (3) أوجد المجموعة (C) المعرفة في السؤال (1).

الحل ــ 1

1 ــ لتكن $(x\,;\,y)$ احداثيات النقطة M

$|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i)|=4$ يكافئ $|(1-i\sqrt{3})(x+iy)-\sqrt{3}-i)|=4$

يكافئ $|x+iy-ix\sqrt{3}+y\sqrt{3}-\sqrt{3}-i|=4$

يكافئ $|x+y\sqrt{3}-\sqrt{3}+i(y-x\sqrt{3}-1)|^2=16$

يكافئ $(x+y\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(y-x\sqrt{3}-1)^2=16$

يكافئ $x^2+3y^2+2xy\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}(x+y\sqrt{3})+y^2+3x^2-2xy\sqrt{3}+1-2(y-x\sqrt{3})=16$

يكافئ $4x^2+4y^2+4-2x\sqrt{3}-6y-2y+2x\sqrt{3}=16$

يكافئ $4x^2+4y^2-8y=12$

يكافئ $x^2+y^2-2y=3$

يكافئ $x^2+(y-1)^2=4$

منه : (C) هي دائرة مركزها $w(0\,;\,1)$ و نصف قطرها 2

2 ــ لتكن $z'=\alpha z+\beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases}S(A)=0\\ S(B)=B'\end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases}\alpha(i)+\beta=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)\\ \alpha(\sqrt{3})+\beta=-4i\;\ldots\ldots\ (2)\end{cases}$$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i-\sqrt{3})=4i$

منه : $\alpha=\dfrac{4i}{-\sqrt{3}+i}\times\dfrac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}$

أي : $\alpha=\dfrac{-4\sqrt{3}\,i+4}{3+1}$

أي : $\alpha=1-i\sqrt{3}$

بالتعويض في (1) : $\beta=-i(1-i\sqrt{3})=-\sqrt{3}-i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$

3 ــ العناصر الهندسية لــ S :

$|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$ إذن : نسبة التشابه S هي 2

$\operatorname{Arg}(1-i\sqrt{3})=\dfrac{-\pi}{3}$ إذن : زاوية التشابه S هي $\dfrac{-\pi}{3}$

$\dfrac{-\sqrt{3}-i}{1-1+i\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}}\times\dfrac{-i}{-i}=\dfrac{i\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ إذن : المركز هو $w\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\,;\,1\right)$

4 ـ نضع $M' = S(M)$ إذن : $M' \in (C)$ يكافئ $|z'| = 4$

منه : M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $(0 ; 0)$ و نصف قطرها 4

إذن معادلتها $x'^2 + y'^2 = 16$

لنبحث عن عبارة x و y بدلالة x' و y' كمايلي :

$$x' + i\,y' = (1 - i\sqrt{3})(x + i\,y) - \sqrt{3} - i$$

أي $$x' + i\,y' = x + i\,y - i\,x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - \sqrt{3} - i$$

أي $$x' + i\,y' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} - 1)$$

أي $$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = y - x\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

نتيجة : $x'^2 + y'^2 = 6$ يكافئ $(x + y\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (y - x\sqrt{3} - 1)^2 = 16$ و هي نفسها معادلة المجموعة (C) المحصل عليها في السؤال (1)

التمرين ـ 2

ليكن u عدد مركب حيث $u = (1 - i)\,z + 2\,i$ مع z لاحقة النقطة M

1 ـ باستعمال التشابه المباشر ذو المركز $A(2 ; 0)$ و الزاوية $\frac{-\pi}{4}$ و النسبة $\sqrt{2}$
عين مجموعة النقط M حيث $|u| = 2$

2 ـ أوجد نتيجة السؤال (1) دون استعمال التشابه .

الحـل ـ 2

1 ـ ليكن S التشابه الذي مركزه $A(2 ; 0)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

إذن : عبارة S هي : $z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] z + \beta$

أي : $z' = (1 - i)\,z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - 1 + i} = 2$

أي $\beta = 2\,i$

نتيجة : عبارة S هي $z' = (1 - i)\,z + 2\,i$

نلاحظ أن $z' = u$

إذن : إذا كانت $M' = S(M)$ فإن u هي لاحقة النقطة M'

إذن : $|u| = 2$ يكافئ $\|\overrightarrow{OM'}\| = 2$

يكافئ M' تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2

أي M' تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و تشمل $A(2 ; 0)$

إذن : M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها هي سابقة النقطة O بالتشابه S

و نصف قطرها $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

نضع $S(P) = 0$

لنبحث عن z بدلالة z' :

$z' = (1 - i)\,z + 2\,i$ يكافئ $z = \frac{z' - 2\,i}{1 - i}$

من أجل $z' = 0$: إذن $z = \frac{-2\,i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i} = 1 - i$: $P(1 ; -1)$

منه : M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $P(1 ; -1)$ و نصف القطر $\sqrt{2}$

أي : مجموعة النقط المطلوبة لها المعادلة : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

2 ـ ليكن $z = x + i\,y$

$|u| = 2$ يكافئ $|u|^2 = 4$

يكافئ $|(1 - i)(x + i\,y) + 2\,i|^2 = 4$

يكافئ $|x + i y - i x + y + 2 i|^2 = 4$

يكافئ $|x + y + i(y - x + 2)|^2 = 4$

يكافئ $x^2 + y^2 + 2 x y + y^2 + x^2 - 2 x y + 4 + 4(y - x) = 4$

يكافئ $2 x^2 + 2 y^2 + 4 y - 4 x = 0$

يكافئ $x^2 + y^2 - 2 x + 2 y = 0$

يكافئ $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

و هي معادلة مجموعة النقط M المطلوبة (نتيجة السؤال (1))

أي دائرة مركزها $P(1 ; -1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$

التمرين ـ 3

في المستوي الموجه نعتبر مربعا مباشرا ABCD ذو المركز O

لتكن P نقطة من القطعة [BC] تختلف على B و C

نعين Q نقطة تقاطع (AP) و (CD)

المستقيم (Δ) العمودي على (AP) في A يقطع (BC) في R و يقطع (CD) في S

1 ـ أنجز الرسم

ليكن T الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

2 ـ حدد صورة المستقيم (BC) بالدوران T

3 ـ عين صور كل من R و P بالدوران T

4 ـ ما هي طبيعة كل من المثلثين ARQ و APS

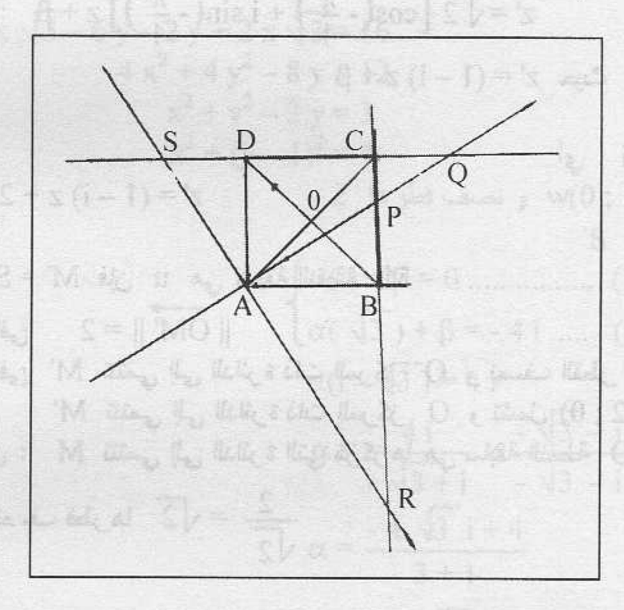
نسمي N منتصف [PS] و M منتصف [RQ]

ليكن f التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

5 ـ عين صورة كل من R و P بالتشابه f

الحـل ـ 3

1 ـ الانشاء :



2 ـ المستقيم (BC) شاقولي إذن صورته بالدوران T ذو الزاوية $\frac{\pi}{2}$ هو مستقيم أفقي (عمودي على (BC))

بما أن صورة B بالدوران T هي D فإن D تنتمي إلى صورة (BC) بالدوران T

و عليه فإن صورة المستقيم (BC) بالدوران T هي المستقيم (DC)

3 ـ لتكن $P' = T(P)$

$P \in (BC)$ إذن : $P' \in (CD)$

$(\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AP'}) = \frac{\pi}{2}$ إذن : $P' \in (AS)$

إذن : P' هي نقطة تقاطع (DC) و (AS)

أي : $T(P) = S$

لتكن $R' = T(R)$

$R \in (CB)$ إذن : $R' \in (CD)$ لأن صورة (CB) بالتشابه T هي (CD)

$(\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AR'}) = \frac{\pi}{2}$ إذن : $R \in (AP)$ لأن $(AP) \perp (AR)$

نتيجة : $R' \in (AP) \cap (CD)$
أي R' تنطبق على Q
منه : $T(R) = Q$

4 ـ $\begin{cases} AR = AQ \\ (\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AQ}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ إذن : المثلث ARQ قائم في A و متساوي الساقين .

$\begin{cases} AS = AP \\ (\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AS}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ إذن : المثلث ASP قائم في A و متساوي الساقين .

5 ـ [PS] هو وتر المثلث ASP و N منتصف [PS] إذن : $\begin{cases} AN = \dfrac{SP}{2} \\ (\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AN}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

[RQ] هو وتر المثلث ARQ و M منتصف [RQ] إذن $\begin{cases} AM = \dfrac{RQ}{2} \\ (\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

في المثلث القائم ASP : $SP^2 = AS^2 + AP^2$
إذن : $SP^2 = 2\,AP^2$ لأن $AP = AS$
منه : $SP = AP\sqrt{2}$
إذن : $AN = \dfrac{SP}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,AP$

في المثلث القائم ARQ : $RQ^2 = AR^2 + AQ^2$
إذن : $RQ^2 = 2\,AR^2$
منه : $RQ = AR\sqrt{2}$
إذن : $AM = \dfrac{RQ}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,AR$

خلاصة : $\begin{cases} AN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,AP \\ (\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AN}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ إذن : $f(P) = N$

$\begin{cases} AM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,AR \\ (\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ إذن : $f(R) = M$

<u>التمرين ـ 4</u>

في المستوي الموجه ABC مثلث حيث $AB = 2$ ؛ $AC = 1 + \sqrt{5}$ ؛ $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$

1 ـ عين نسبة و زاوية التشابه S الذي يحول B إلى A و يحول A إلى C
نسمي w مركز التشابه S
2 ـ بين أن w تنتمي إلى لدائرة ذات القطر [AB]
لتكن D صورة النقطة C بالتشابه S
3 ـ برهن استقامية النقط B ، w ، C .
4 ـ برهن أن $CD = 3 + \sqrt{5}$

<u>الحـل ـ 4</u>

لننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث :
$\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{u}$ ؛ $\overrightarrow{AC} = (1 + \sqrt{5})\,\vec{v}$
إذن : $A(0 ; 0)$ ؛ $B(2 ; 0)$ ؛ $C(0 ; 1 + \sqrt{5})$

1 ـ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(B) = A \\ S(A) = C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(2) + \beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \alpha(0) + \beta = (1 + \sqrt{5})\, i \ldots\ldots (2) \end{cases}$

من (2) : $\beta = (1 + \sqrt{5})\, i$

بالتعويض في (1) : $\alpha = \dfrac{-(1 + \sqrt{5})}{2}$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z' = \dfrac{-(1 + \sqrt{5})}{2}\, i\, z + (1 + \sqrt{5})\, i$

بما أن $\begin{cases} \left| \dfrac{-(1 + \sqrt{5})}{2} \right| i = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{-(1 + \sqrt{5})}{2} \right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

فإن : نسبة التشابه S هي $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ و زاويته هي $\dfrac{-\pi}{2}$

2 ـ لاحقة النقطة w مركز التشابه S هي : $\dfrac{(1 + \sqrt{5})\, i}{1 + \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) i} = \dfrac{2(1 + \sqrt{5})\, i}{2 + (1 + \sqrt{5})\, i}$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{5})\, i\,[2 - (1 + \sqrt{5})\, i]}{[2 + (1 + \sqrt{5})\, i][2 - (1 + \sqrt{5})\, i]}$$

$$= \frac{4i(1 + \sqrt{5}) + 2(1 + \sqrt{5})^2}{4 + (1 + 5 + 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{5})^2 + 4(1 + \sqrt{5})i}{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5})^2 + 2(1 + \sqrt{5})i}{5 + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5})^2 + 2(1 + \sqrt{5})i}{\sqrt{5}\,(1 + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\, i$$

منه : $w\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \;;\; \dfrac{2}{\sqrt{5}} \right)$

لدينا معادلة الدائرة ذات القطر [AB] هي : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

أي : $x^2 + y^2 - 2x = 0$

لدينا : $\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - 2\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) = \dfrac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{5} + \dfrac{4}{5} - \dfrac{2 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{5} + 4 - 2\sqrt{5} - 10}{5}$$

$= 0$ إذن : فعلا w تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AB]

من جهة أخرى : $\overrightarrow{wB}\begin{pmatrix} 2 - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ 0 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 + \sqrt{5} - 0 \end{pmatrix}$

منه :

$$\begin{vmatrix} -2 & 2-\frac{1+\sqrt5}{\sqrt5} \\ 1+\sqrt5 & -\frac{2}{\sqrt5}\end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt5} - (1+\sqrt5)\left(2-\frac{1+\sqrt5}{\sqrt5}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt5} - \left(2 - \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5} + 2\sqrt5 - 1 - \sqrt5\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt5} - \left(2-\frac{1}{\sqrt5} - 1 + 2\sqrt5 - 1 - \sqrt5\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt5} - \left(\sqrt5 - \frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt5} - \frac{4}{\sqrt5}$$

إذن : $= 0$ $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{wB}$

منه : النقط w ، B ، C على استقامة واحدة .

3 ـ من أجل $z=(1+\sqrt5)\,i$ لدينا $z' = \frac{-(1+\sqrt5)}{2}\, i\,(1+\sqrt5)\,i + (1+\sqrt5)\,i$

أي $z' = \frac{(1+\sqrt5)^2}{2} + (1+\sqrt5)\,i$

أي : $z'=\frac{6+2\sqrt5}{2} + (1+\sqrt5)\,i$

أي : $z' = (3+\sqrt5)+(1+\sqrt5)\,i$

إذن : لاحقة النقطة D هي $(3+\sqrt5)+(1+\sqrt5)\,i$

منه : $CD = \left|(3+\sqrt5)+(1+\sqrt5)\,i-(1+\sqrt5)\,i\right|$

$= |3+\sqrt5|$

$=3+\sqrt5$ و هو المطلوب

التمرين ـ 5

A نقطة لاحقتها $2+i$

H تحاكي مركزه A و نسبته $1/2$

S تحويل نقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = i\,\overline{z}+1-i$

ليكن T تحويل نقطي حيث $T = SoH$

1 ـ عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S ثم استنتج طبيعته

2 ـ عين الشكل المركب للتحويل T

3 ـ أثبت أن T يقبل نقطة صامدة وحيدة هي A

الحـل ـ 5

1 ـ لتكن $z=x+i\,y$ حيث x و y عددان حقيقيان

تكون w ذات اللاحقة z صامدة بـ التحويل S إذا و فقط إذا كان :

$S(w) = w$ أي : $i\,\overline{z}+1-i=z$

أي : $i(x-i\,y)+1-i=x+i\,v$

أي : $i\,x+y+1-i=x+i\,y$

أي $i\,x+y+1-i-x-i\,y=0$

أي $1-x+y+i(x-y-1)=0$

أي $\begin{cases} 1-x+y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 1-x+y=0 \\ 1-x+y=0 \end{cases}$

أي $1-x+y=0$

منه : مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S هي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $1-x+y=0$

لتكن $M(x\,;y)$ و $M'(x'\,;y')$

$M'=S(M)$ يكافئ $x'+iy'=i(x-iy)+1-i$

يكافئ $x'+iy'=y+1+i(x-1)$

يكافئ $\begin{cases} x'=y+1 \\ y'=x-1 \end{cases}$

لدينا : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y+1-x \\ x-1-y \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -(x-y-1) \\ (x-y-1) \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

من جهة أخرى شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

منه : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MM'}=(-1)(-1)+(1)(-1)=0$

إذن : $\overrightarrow{MM'}$ عمودي على (Δ)

لتكن w منتصف $[MM']$

إذن : $w\left(\dfrac{x+y+1}{2}\,;\,\dfrac{y+x-1}{2}\right)$

بالتعويض في معادلة (Δ) :

$$1-\frac{x+y+1}{2}+\frac{y+x-1}{2}=1+\frac{-x-y-1+y+x-1}{2}$$
$$=1-1$$
$$=0$$

إذن : $w\in(\Delta)$

نتيجة : 'M هي نظيرة M بالنسبة إلى (Δ)

إذن : التحويل S هو تناظر عمودي بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $1-x+y=0$ أي $y=x-1$

2 ــ لنبحث عن الشكل المركب لــ H :

حيث $z'=\dfrac{1}{2}z+\beta$ ، $\dfrac{\beta}{1-\dfrac{1}{2}}=2+i$

أي : $\beta=\dfrac{1}{2}(2+i)=1+\dfrac{1}{2}i$

إذن : عبارة H هي $z'=\dfrac{1}{2}z+1+\dfrac{1}{2}i$

التركيب : $z\overset{H}{\longmapsto}\dfrac{1}{2}z+1+\dfrac{1}{2}i\overset{S}{\longmapsto}i\left(\overline{\dfrac{1}{2}z+1+\dfrac{1}{2}i}\right)+1-i$

منه :
$$SoH(z)=i\left(\frac{1}{2}\bar{z}+1-\frac{1}{2}i\right)+1-i$$
$$=\frac{1}{2}i\bar{z}+i+\frac{1}{2}+1-i$$
$$=\frac{1}{2}i\bar{z}+\frac{3}{2}$$

إذن : الشكل المركب لــ T : $z'=\dfrac{1}{2}i\bar{z}+\dfrac{3}{2}$

3 ــ لتكن w ذات اللاحقة z حيث $z=x+iy$

w صامدة بــ T إذا و فقط إذا كان $T(w)=w$

أي : $z'=z$

أي $\dfrac{1}{2}i\bar{z}+\dfrac{3}{2}=z$

أي $\frac{1}{2}i(x-iy)+\frac{3}{2}=x+iy$

أي $\frac{1}{2}ix+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}-x-iy=0$

أي $\frac{1}{2}y-x+\frac{3}{2}+i(\frac{1}{2}x-y)=0$

أي $\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=0\\ \frac{1}{2}y-x+\frac{3}{2}=0\end{cases}$

أي $\begin{cases}(1)\ ....\ x-2y=0\\ (2)....\ y-2x+3=0\end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة (1) في 2 : $(3)\ ......\ 2x-4y=0$

نجمع (3) و (2) : $y-2x+3+2x-4y=0$

أي : $-3y+3=0$

أي : $y=1$

بالتعويض في (1) : $x=2y=2$

نتيجة : التحويل T له نقطة صامدة وحيدة $w(2;1)$ أي w تنطبق على A

<u>التمرين ــ 6</u>

S تشابه غير مباشر يحول ا نقطة A إلى B و النقطة C إلى D

عين العبارة المركبة للتشابه S إذا كانت لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب هي $3i$ ؛ 3 ؛ $3-2i$ ؛ $-3-2i$

<u>الحــل ــ 6</u>

S تشابه غير مباشر إذن عبارته $z'=\alpha\overline{z}+\beta$

$\begin{cases}S(A)=B\\ S(C)=D\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\alpha(3i)+\beta=3\ ....\ (1)\\ \alpha(3+2i)+\beta=-3-2i\ ....\ (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(3i-3-2i)=3+3+2i$

أي : $\alpha=\frac{6+2i}{-3+i}\times\frac{-3-i}{-3-i}$

أي $\alpha=\frac{-18-6i-6i+2}{10}$

أي $\alpha=\frac{-16-12i}{10}$

أي $\alpha=-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$

بالتعويض في (1) : $\beta=3-3i\left(-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i\right)$

$=3+\frac{24}{5}i-\frac{18}{5}$

$=-\frac{3}{5}+\frac{24}{5}i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z'=\left(-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i\right)\overline{z}-\frac{3}{5}+\frac{24}{5}i$

<u>التمرين ــ 7</u>

S تحويل نقطي عبارته $z'=-5i\overline{z}+1+i$

1 ــ أوجد معادلة لصورة المستقيم (AB) حيث A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $1+2i$ و 2

2 ــ عين صورة الدائرة ذات المركز $I(3;1)$ و نصف القطر $\sqrt{5}$ بالتحويل S

الحـل ـ 7

نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$z' = -5i\bar{z} + 1 + i$ يكافئ $x' + iy' = -5i(x - iy) + 1 + i$

يكافئ $x' + iy' = -5ix - 5y + 1 + i$

يكافئ $x' + iy' = 1 - 5y + i(1 - 5x)$

يكافئ $\begin{cases} x' = 1 - 5y \\ y' = 1 - 5x \end{cases}$ و هو الشكل التحليلي للتحويل S

1 ـ لنبحث عن معادلة المستقيم (AB) :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$M(x ; y) \in (AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BM}$

يكافئ $\begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 0$

يكافئ $y = -2x + 4$ و هي معادلة (AB)

1 ـ لنبحث عن عبارة x و y بدلالة x' و y' في التحويل S :

$\begin{cases} x' = 1 - 5y \\ y' = 1 - 5x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y = \dfrac{1 - x'}{5} \\ x = \dfrac{1 - y'}{5} \end{cases}$

معادلة (AB) هي $y = -2x + 4$

إذن : معادلة صورة (AB) هي : $\dfrac{1 - x'}{5} = -2\left(\dfrac{1 - y'}{5}\right) + 4$

أي : $1 - x' = -2 + 2y' + 20$

أي : $2y' = 1 - x' + 2 - 20$

أي : $y' = -\dfrac{1}{2}x' - \dfrac{17}{2}$

نتيجة : صورة (AB) بالتحويل S هو المستقيم ذو المعادلة $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{17}{2}$

2 ـ لتكن (C) الدائرة ذات المركز $I(3 ; 1)$ و نصف القطر $\sqrt{5}$

معادلة (C) : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$

إذن : معادلة صورة (C) هي : $\left(\dfrac{1 - y'}{5} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{1 - x'}{5} - 1\right)^2 = 5$

أي : $\left(\dfrac{1 - y' - 15}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{1 - x' - 5}{5}\right)^2 = 5$

أي : $\left(\dfrac{14 + y'}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{x' + 4}{5}\right)^2 = 5$

أي : $(y' + 14)^2 + (x' + 4)^2 = 125$

أي : $(x' + 4)^2 + (y' + 14)^2 = (5\sqrt{5})^2$

إذن : صورة (C) هي الدائرة التي مركزها $w(-4 ; -14)$ و نصف قطرها $5\sqrt{5}$

ملاحظة : يمكن الاجابة باستعمال خواص التشابه كما يلي :

S تشابه نسبته $5 = |-5i|$

إذن : صورة الدائرة (C) بـ S هي الدائرة التي مركزها w حيث $w = S(I)$ و نصف قطرها $5\sqrt{5}$

البحث عن w : S(I)

من أجل $z = 3 + i$ فإن : $z' = -5i(3 - i) + 1 + i$

$= -15i - 5 + 1 + i$

$= -14i - 4$

إذن : $w(-4\,;\,-14)$

منه : معادلة صورة (C) بالتشابه S هي : $(x+4)^2+(y+14)^2=(5\sqrt{5})^2$

التمرين – 8

A_0 ، A_1 ، A_2 نقط لواحقها على الترتيب : $z_0=5-4i$ ؛ $z_1=-1-4i$ ؛ $z_2=-4-i$

1 – عين الكتابة المركبة للتشابه S الذي يحول A_0 إلى A_1 و A_1 إلى A_2

2 – استنتج نسبة و زاوية و مركز التشابه S

ليكن w مركز التشابه S حيث t لاحقة w

ليكن M و M' نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z' حيث $z\neq t$ و $S(M)=M'$

3 – تحقق أن : $t-z'=i(z-z')$ ثم استنتج طبيعة المثلث wMM'

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف النقطة A_{n+1} بـ : $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $u_n=\|A_nA_{n+1}\|$

4 – برهن أن المتتالية (u_n) هندسية

نعرف المتتالية (v_n) على IN بـ : $v_n=u_0+u_1+......+u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$

5 – عبر عن v_n بدلالة n

6 – هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

الحل – 8

1 – لتكن $z'=\alpha z+\beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases}S(A_0)=A_1\\S(A_1)=A_2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha(5-4i)+\beta=-1-4i\ ....\ (1)\\\alpha(-1-4i)+\beta=-4-i\ ....\ (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(5-4i+1+4i)=-1-4i+4+i$

أي $6\alpha=3-3i$

أي $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

بالتعويض في (1) : $\beta=-1-4i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(5-4i)$

أي $\beta=-1-4i-\frac{5}{2}+2i+\frac{5}{2}i+2$

أي $\beta=1-\frac{5}{2}-2i+\frac{5}{2}i$

أي $\beta=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

النتيجة : عبارة التشابه S : $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

2 – النسبة : $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $Arg\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\dfrac{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-3+3i+i+1}{2}=-1+2i$ إذن : المركز $w(-1\,;\,2)$

3 – t لاحقة w إذن : $t=-1+2i$

إذن : $t-z'=-1+2i-\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right]$

$=-1+2i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$

من جهة أخرى :
$$i(z-z') = i\,z - i\,z'$$
$$= i\,z - i\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i\right]$$
$$= i\,z - \left(\frac{1}{2}\,i + \frac{1}{2}\right)z + \frac{3}{2}\,i + \frac{1}{2}$$
$$= z\left(i - \frac{1}{2}\,i - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\,i + \frac{1}{2}$$
$$= z\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) + \frac{3}{2}\,i + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)z$$
$$= t - z'$$

نتيجة : $i(z-z') = t - z'$ منه $|i(z-z')| = |t-z'|$

أي $|z-z'| = |t-z'|$

أي $MM' = wM'$

إذن : wMM' مثلث متساوي الساقين

و بما أن $(\overrightarrow{wM}\,;\overrightarrow{wM'}) = -\frac{\pi}{4}$ فإن : المثلث wMM' قائم في M'

أي : wMM' قائم في M' و متساوي الساقين

4 ـ لتكن z_n لاحقة A_n و z_{n+1} لاحقة A_{n+1}

$S(A_n) = A_{n+1}$ إذن : $t - z_{n+1} = i(z_n - z_{n+1})$

منه : $|t - z_{n+1}| = |z_n - z_{n+1}|$

أي $\|\overrightarrow{wA_{n+1}}\| = \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\|$

لدينا نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : $wA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,wA_0$

$$wA_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,wA_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 wA_0$$
$$wA_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,wA_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 wA_0$$
$$\vdots$$
$$wA_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} wA_0$$

إذن : $\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} wA_0$

لنحسب wA_0 : $|t - z_0| = |-1 + 2i - 5 + 4i| = |-6 + 6i| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

منه : $\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times 6\sqrt{2}$

أي : $u_n = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$ إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و حدها الأول $6\sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

5 ـ
$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}\right)$$

$$= 6\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \times \frac{2}{\sqrt{2} - 2}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{2} - 2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

6 – $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{12}{\sqrt{2} - 2} \times (-1)$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{12}{2 - \sqrt{2}}$

التمرين – 9

A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $-\frac{1}{2}i$ ، $1-\frac{1}{2}i$ ،

$1+\frac{1}{2}i$ ، $\frac{1}{2}i$ ، $1-i$ ، $3-i$ ، $3+i$ ، $1+i$

C_1 هو المربع ذو الرؤوس A ، B ، C ، D و المركز O_1

C_2 هو المربع ذو الرؤوس E ، F ، G ، H و المركز O_2

نضع $S_1 = \{A ; B ; C ; D\}$ و $S_2 = \{E ; F ; G ; H\}$

1 – مثل النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H

2 – ليكن H التحاكي ذو المركز $w(-1 ; 0)$ و النسبة 2

أكتب العبارة المركبة للتحاكي H ثم بين أن H يحول S_1 إلى S_2

3 – ليكن S التشابه الذي يحول S_1 إلى S_2 و g التحويل النقطي المعرف بـ $g = H^{-1}oS$ حيث H^{-1} هو التحاكي الذي مركزه $w(-1 ; 0)$ و نسبته 1/2

أ) ما هي نسبة التشابه S

ب) أثبت أن G تقايس و أن S_1 مجموعة صامدة إجماليا بـ g

جـ) برهن أن $g(O_1) = O_1$

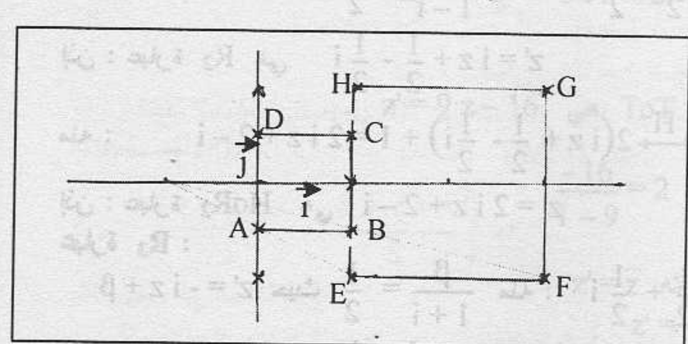
د) استنتج أن g هو أحد التحويلات التالية : التحويل المطابق ، دوران R_1 ذو المركز O_1 و الزاوية π ؛ دوران R_2 ذو المركز O_1 و الزاوية π/2 ؛ دوران R_3 مركزه O_1 و زاويته -π/2

هـ) عين العبارات المركبة لكل من HoR_1 ؛ HoR_2 ؛ HoR_3

و) استنتج المركز w_1 ، w_2 ، w_3 لكل من التشابهات HoR_1 ؛ HoR_2 ؛ HoR_3 على الترتيب .

الحل – 9

– 1



2 – ليكن $z' = 2z + \beta$ عبارة التحاكي H

المركز هو w إذن : $\frac{\beta}{1-2} = -1$ منه $\beta = 1$

إذن : عبارة التحاكي H هي : $z' = 2z + 1$

لدينا O_1 مركز S_1 إذن : $O_1(1/2 ; 0)$

و O_2 مركز S_2 إذن : $O_2(2 ; 0)$

من أجل $z = 1/2$ فإن : $z' = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$ إذن : $H(O_1) = O_2$

طول ضلع المربع C_1 هو 1

طول ضلع المربع C_2 هو 2 حيث $2 = 2 \times 1$ (نسبة التحاكي H هي 2)

نتيجة : S_2 هو صورة S_1 بالتحاكي H

3 – أ) S تشابه يحول S_1 إلى S_2 إذن : نسبة التشابه S هي 2 و يحقق $S(O_1) = O_2$

ب) $g = H^{-1}oS$
نسبة التشابه H^{-1} هي 1/2 إذن : g هو تشابه نسبته 1 (جداء نسبتي H^{-1} و S
نسبة التشابه S هي 2 إذن : g هو تقايس

من جهة أخرى : $g(O_1) = H^{-1}[S(O_1)] = H^{-1}(O_2) = O_1$

إذن : $g(C_1) = C_1$

أي : $g(S_1) = S_1$

أي S_1 مجموعة صامدة إجماليا بـ g

جـ) $g(O_1) = H^{-1}[S(O_1)]$ منه : $g(O_1) = H^{-1}(O_2)$

لدينا : $\overrightarrow{wO_1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{wO_1}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v'O_2}\begin{pmatrix} 2+1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{wO_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ منه $\frac{1}{2}\overrightarrow{wO_2}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

بما أن : $\overrightarrow{wO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{wO_2}$ فإن $O_1 = H^{-1}(O_2)$

منه : $g(O_1) = H^{-1}(O_2) = O_1$ و هو المطلوب

جـ) لدينا $g(S_1) = S_1$

إذن : النقطة D تتحول إما إلى نفسها D ، أو إلى C أو إلى B أو إلى A

نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $g(D) = D$: إذن g هو التحويل المطابق

الحالة (2) $g(D) = C$: إذن g دوران مركزه O_1 و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و ليكن R_3

الحالة (3) $g(D) = B$: إذن g دوران مركزه O_1 و زاويته π و ليكن R_1

الحالة (4) $g(D) = A$: إذن g دوران مركزه O_1 و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن R_2

هـ) **عبارة R_1 :**

$z' = -z + \beta$ حيث، $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$ منه : $\beta = 1$

إذن : عبارة R_1 هي $z' = -z + 1$

منه : $z \xrightarrow{R_1} -z+1 \xrightarrow{H} 2(-z+1)+1 = -2z+3$

إذن : عبارة HoR_1 هي $z' = -2z+3$

عبارة R_2 :

$z' = iz + \beta$ حيث، $\frac{\beta}{1-i} = \frac{1}{2}$ منه : $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن : عبارة R_2 هي $z' = iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

منه : $z \xrightarrow{R_2} iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \xrightarrow{H} 2\left(iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 1 = 2iz + 2 - i$

إذن : عبارة HoR_2 هي $z' = 2iz + 2 - i$

عبارة R_3 :

$z' = -iz + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+i} = \frac{1}{2}$ منه : $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

منه : عبارة R_3 : $z' = -iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

إذن : $z \xrightarrow{P_3} -iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \xrightarrow{H} 2\left(-iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 1 = -2iz + 2 + i$

إذن : عبارة HoR_3 هي $z' = -2iz + 2 + i$

و) **المركز :**

$\frac{3}{1+2} = 1$ إذن : $w_1(1\,;0)$ هو مركز التشابه HoR_1

$\frac{2-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2+4i-i+2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ إذن : $w_2\left(\frac{4}{5}\,;\frac{3}{5}\right)$ هو مركز HoR_2

$\frac{2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i+i+2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ إذن : $w_3\left(\frac{4}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$ هو مركز HoR_3

التمرين – 10

T تحويل نقطي للمستوي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة 'M ذات اللاحقة 'z حيث $z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i$

1 – ما هي طبيعة التحويل T ؟

2 – لتكن ''z لاحقة النقطة ''M حيث $M'' = T(M')$
عين ''z بدلالة z

3 – عين طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة

4 – برهن أن T هو مركب تناظر محوري ذو المحور (xx') و تشابه S يطلب تحديد عناصره

5 – برهن أن T هو مركب لتحاكي ذو المركز A و النسبة 3- و التناظر المحوري ذو المحور المستقيم (d) الذي يشمل A و معامل توجيهه 1 حيث A هو مركز التشابه S

الحـل – 10

1 – $z \xrightarrow{S} \bar{z} \xrightarrow{P} -3i\bar{z} + 2 + 6i$

إذن : T هو مركب الناظر المحوري S بالنسبة إلى محور الفواصل و التشابه المباشر P الذي نسبته 3

إذن : T هو تشابه غير مباشر نسبته 3 و مركزه النقطة الصامدة A كمايلي :

لتكن $A(x ; y)$ صامدة

$x + iy = -3i(x - iy) + 2 + 6i$

أي $x + iy = -3ix - 3y + 2 + 6i$

أي $(x + 3y - 2) + i(3x + y - 6) = 0$

أي $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8$ إذن : $\begin{cases} x = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2 \\ y = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

إذن : مركز التشابه T هو $A(2 ; 0)$

2 – $z \xrightarrow{T} z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i \xrightarrow{T} z'' = -3i\overline{(-3i\bar{z} + 2 + 6i)} + 2 + 6i$

$= -3i(3iz + 2 - 6i) + 2 + 6i$

$= 9z - 6i - 18 + 2 + 6i$

$= 9z - 16$ إذن : عبارة ToT هي $z' = 9z - 16$

3 – طبيعة التحويل ToT :

ToT هو تحاكي نسبته 9 و مركزه w ذات اللاحقة $\frac{-16}{1-9} = 2$

أي مركز التحاكي ToT هو النقطة $A(2 ; 0)$

4 – ليكن P التناظر المحوري بالنسبة إلى (xx') إذن عبارته $z' = \bar{z}$

و ليكن S تشابه مباشر عبارته : $z' = -3iz + 2 + 6i$

إذن : $z \xrightarrow{P} \bar{z} \xrightarrow{S} -3i\bar{z} + 2 + 6i$

منه : $T = SoP$

العناصر الهندسية للتشابه S :

النسبة : $|-3i| = 3$

الزاوية : $Arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$

المركز : $\frac{2+6i}{1+3i} = \frac{2(1+3i)}{1+3i} = 2$ إذن : المركز هو $A(2 ; 0)$

5 – ليكن S التحاكي ذو المركز A و النسبة 3 -

عبارة S : $z' = -3z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+3} = 2$ أي $\beta = 8$

منه عبارة S هي $z' = -3z + 8$

نفرض وجود تحويل نقطي P حيث $SoP = T$

ليكن S^{-1} التحاكي الذي مركزه $A(2;0)$ و نسبته $-\frac{1}{3}$ - إذن عبارة S^{-1} هي : $z' = -\frac{1}{3}z + \beta$

حيث $\frac{\beta}{1+\frac{1}{3}} = 2$ منه $\beta = \frac{8}{3}$

منه عبارة S^{-1} هي $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{8}{3}$

لدينا : $SoP = T$ منه $S^{-1}oSoP = S^{-1}oT$

أي : $P = S^{-1}oT$ لأن $S^{-1}oS$ هو تحويل مطابق

لنبحث إذن عن عبارة $S^{-1}oT$ كمايلي :

$$z \xrightarrow{T} -3i\bar{z} + 2 + 6i \xrightarrow{S^{-1}} z' = -\frac{1}{3}[-3i\bar{z} + 2 + 6i] + \frac{8}{3}$$

$$= i\bar{z} - \frac{2}{3} - 2i + \frac{8}{3}$$

$$= i\bar{z} + 2 - 2i$$

إذن : عبارة التحويل P حيث $SoP = T$ هي $z' = i\bar{z} + 2 - 2i$

لنبحث الآن عن طبيعة التحويل P كمايلي :

عبارة x' و y' بدلالة x و y :

$$x' + iy' = i(x - iy) + 2 - 2i$$

أي $x' + iy' = ix + y + 2 - 2i$

أي $x' + iy' = y + 2 + i(x - 2)$

أي $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

النقط الصامدة :

$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y - x + 2 = 0 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases}$

يكافئ $y - x + 2 = 0$

إذن : النقط الصامدة بالتحويل P هي المستقيم (d) ذو المعادلة $y - x + 2 = 0$

منتصف $[MM']$: لتكن w منتصف $[MM']$ حيث $M' = P(M)$

إذن : $w\left(\frac{x+y+2}{2} ; \frac{x-2+y}{2}\right)$

بالتعويض في معادلة (d) :

$$\frac{x-2+y}{2} - \frac{x+y+2}{2} + 2 = \frac{x-2+y-x-y-2}{2} + 2$$

$$= 2 - 2$$

$= 0$ إذن : $w \in (d)$

وضعية (MM') بالنسبة إلى المستقيم (d)

(d) له شعاع توجيه $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y + 2 - x \\ x - 2 - y \end{pmatrix}$$

منه : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = -1(y + 2 - x) - 1(x - 2 - y)$

$= - y - 2 + x - x + 2 + y$

$= 0$ إذن : $\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'}$

منه : (MM') عمودي على (d)

خلاصة : M' هي نظيرة النقطة M بالنسبة إلى المستقيم (d)

هل $A \in (d)$ ؟ $A(2 ; 0)$ إذن : $0 - 2 + 2 = 0$

إذن : فعلا A تنتمي إلى (d)

معامل توجيه (d) : (d) له المعادلة $y - x + 2 = 0$ أي $y = x + 2$

منه : معامل توجيه (d) هو 1

نتيجة : التحويل P هو تناظر محوري بالنسبة إلى المستقيم (d) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه 1

التمرين ـــ 11

ليكن $z_1 = \sqrt{2}(1 - i)$ ؛ $z_2 = \dfrac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})\, i}{1 - z_1}$

1 ـــ أكتب العدد z_1 على شكله المثلثي

2 ـــ برهن أن $z_2 = - i$

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

S تحويل نقطي يرفق بـــ كل نقطة M النقطة M' حيث $\begin{cases} x' = \sqrt{2}(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}(-x + y + 1) - 1 \end{cases}$

3 ـــ أكتب z' بدلالة z

4 ـــ استنتج الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل S

ليكن (Δ) مستقيم معادلته $x + y + 1 = 0$

5 ـــ أكتب معادلة المستقيم (d) صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S

6 ـــ أكتب العبارة المركبة للتحويل SoS

7 ـــ برهن أن SoS هو تشابه مباشر

8 ـــ قارن بين العناصر المميزة لـــ S و SoS

الحل ـــ 11

1 ـــ $z_1 = \sqrt{2}(1 - i)$ إذن : $|z_1| = \sqrt{2}\,|1 - i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

لتكن θ عمدة لـــ z_1

إذن : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ منه : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

نتيجة : $z_1 = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

2 ـــ
$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})\, i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})\, i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2 - 2\,i + (-1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})i + \sqrt{2}(-1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2 - 2\,i - i + i\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2\,i - \sqrt{2} + 2}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2}$$

$$= \frac{(-5 + 2\sqrt{2})\, i}{5 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-(5-2\sqrt{2})}{5-2\sqrt{2}}\ i$$

$$= -i$$

3 ـ $x' + i y' = \sqrt{2}(x+y+1) + i[\sqrt{2}(-x+y+1)-1]$

$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} + i(-x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$$

$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - x\sqrt{2}\,i + y\sqrt{2}\,i + i\sqrt{2} - i$$

$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2}\,i - x\sqrt{2}\,i + y\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$= \sqrt{2}(x+iy) - i\sqrt{2}(x+iy) + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

$$= (x+iy)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

منه : $z' = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$ و هو المطلوب

4 ـ **طبيعة التحويل S :**

النسبة : $|\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$ إذن : S تشابه نسبته 2

الزاوية : $Arg(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\frac{\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = -i$ (حسب السؤال (1)) إذن : مركز التشابه S هو $w(0\,;-1)$

5 ـ نعلم أن صورة مستقيم بتشابه هو مستقيم

بما أن $x' = \sqrt{2}(x+y+1)$ ، $x+y+1=0$ (معادلة (Δ))

فإن : $x' = \sqrt{2}(0) = 0$

منه : معادلة المستقيم (d) هي $x'=0$ أي (d) هو محور التراتيب

6 ـ $z \xrightarrow{S} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i \xrightarrow{S} z' = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)[(\sqrt{2} - i\sqrt{2})z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i] + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$

$$= -4iz + \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2}-1)i + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

$$= -4iz + 2 - 2i + i(2 - \sqrt{2} - 2i + i\sqrt{2}) + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$= -4iz + 2 - 2i + 2i - i\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$= -4iz + 4 - i$$

نتيجة : عبارة SoS هي : $z' = -4iz + 4 - i$

7 ـ $|-4i| = 4$ إذن : SoS هو تشابه مباشر نسبته 4

و زاويته $Arg(-4i) = -\frac{\pi}{2}$ و مركزه w ذات اللاحقة $\frac{4-i}{1+4i} = \frac{(4-i)(1-4i)}{17}$

$$= \frac{4 - 16i - i - 4}{17}$$

$$= -i$$

إذن : المركز هو $w(0\,;-1)$

مقارنة :

	التشابه S	التشابه SoS
المركز	$w(0\,;-1)$	$w(0\,;-1)$
النسبة	$k=2$	$k' = k \times k = 4$
الزاوية	$\theta = -\frac{\pi}{4}$	$\theta' = \theta + \theta = -\frac{\pi}{2}$

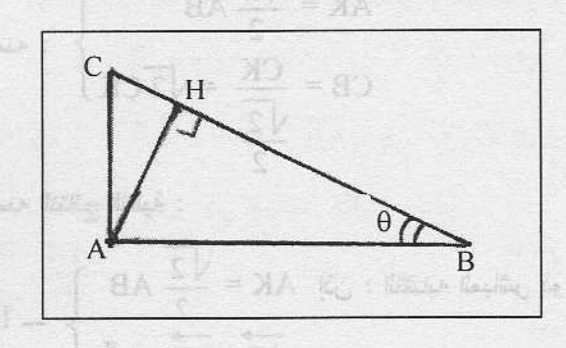
التمرين ـ 12

ABC مثلث قائم في A حيث $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}) = \theta$

H هو المسقط العمودي للنقطة A على [BC]

ما هما نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه H و يحول A إلى B ؟

الحـل ــ 12



لدينا $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ إذن : $tg\theta > 0$

في المثلث القائم HAB لدينا : $tg\theta = \frac{HA}{HB}$

منه : $HB\ tg\theta = HA$

أي : $HB = \frac{1}{tg\theta} HA$ إذن : نسبة التشابه هي $\frac{1}{tg\theta}$

من جهة أخرى : $(\overrightarrow{HA} ; \overrightarrow{HB}) = \frac{\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$

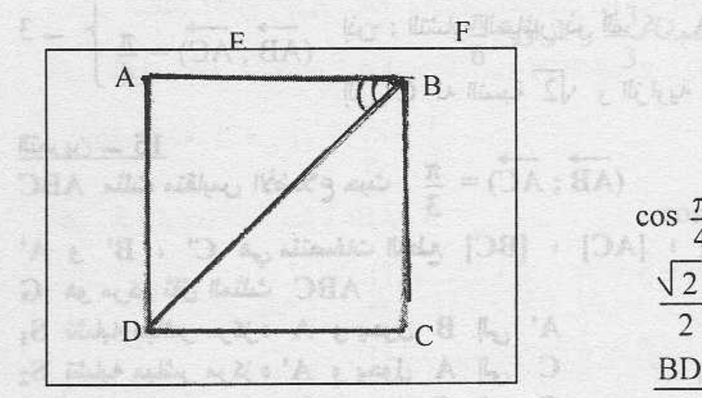
التمرين ــ 13

ABCD مربع حيث $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

عين نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و B إلى D

الحـل ــ 13

ليكن S هذا التشابه حيث زاويته θ و نسبته k



$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = D \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} k = \frac{BD}{AB} \\ \theta = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD}) \end{cases}$

لدينا $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{4}$ منه $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{BD}$

أي : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{BD}$

أي : $\frac{BD}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

منه : $k = \sqrt{2}$

حسب الشكل فإن : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD}) = -3\frac{\pi}{4}$

نتيجة : S له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $-\frac{3\pi}{4}$

التمرين ــ 14

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B . K منتصف [AC] حيث $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$

عين في كل ممايلي نسبة و زاوية التشابه المباشر S حيث :

1 ــ المركز A و يحول B إلى K

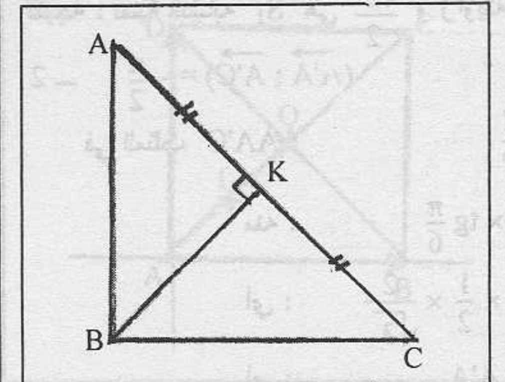
2 ــ المركز C و يحول K إلى B

3 ــ المركز A و يحول B إلى C

الحـل ــ 14

من خواص المثلث المتساوي الساقين و القائم ما يلي :

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ ؛ $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$ ؛ $AK = KC = BK$



إذن : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB}$

أي : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB}$

$$AK = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$$

منه :

$$CB = \frac{CK}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\, CK$$

منه النتائج التالية :

1 — $AK = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$ ، $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{4}$ إذن : التشابه المباشر ذو المركز A و يحول B إلى K له النسبة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و الزاوية $\frac{\pi}{4}$

2 — $CB = \sqrt{2}\, CK$ ، $(\overrightarrow{CK} ; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$ إذن : التشابه المباشر ذو المركز C و يحول K إلى B له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $\frac{\pi}{4}$

3 — $AC = \sqrt{2}\, AB$ (حسب فيثاغورث) ، $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ إذن : التشابه المباشر ذو المركز A و يحول B إلى C له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $\frac{\pi}{4}$

التمرين — 15

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

A' و B' ، C' هي منتصفات القطع [BC] ؛ [AC] ؛ [AB] على الترتيب

G هو مركز ثقل المثلث ABC

S_1 تشابه مباشر مركزه A و يحول B إلى A'

S_2 تشابه مباشر مركزه A' و يحول A إلى C

S_3 تشابه مباشر مركزه B و يحول C إلى G

S_4 تشابه مباشر مركزه G و يحول A إلى B'

عين نسب و زوايا كل من التشابهات S_1 ، S_2 ، S_3 ، S_4

الحل — 15

من خواص المثلث المتقايس الأضلاع أن الأعمدة هي متوسطات و هي منصفات للزوايا و نقطة تقاطعها هي إذن مركز الثقل للمثلث و هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث منه النتائج التالية :

A
C'
G
B'
B
A'
C

1 — $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{6}$

إذن : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AA'}{AB}$ منه : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AA'}{AB}$

أي $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$

نتيجة : نسبة التشابه S_1 هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

2 — $(\overrightarrow{A'A} ; \overrightarrow{A'C}) = -\frac{\pi}{2}$

في المثلث $AA'C$:

$$tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{A'C}{AA'}$$

منه : $A'C = AA' \times tg\,\frac{\pi}{6}$

أي : $A'C = A'A \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

أي : $A'C = \frac{\sqrt{3}}{3} A'A$

نتيجة : نسبة التشابه S_2 هي $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

3 ـ $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6}$

في المثلث BGA' : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{BA'}{BG}$

أي : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{BC}{2}}{BG}$

أي : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2\,BG}$

أي : $\sqrt{3} = \frac{BC}{BG}$

أي : $BG = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$

نتيجة : $\begin{cases} BG = \frac{\sqrt{3}}{3}BC \\ (\overrightarrow{EC}\ ;\ \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ إذن : التشابه S_3 له النسبة $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{6}$

4 ـ $(\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{GB'}) = -\frac{\pi}{3}$

في المثلث AGB' : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{GB'}{GA}$

أي : $\frac{1}{2} = \frac{GB'}{GA}$

منه : $GB' = \frac{1}{2}GA$

نتيجة : $\begin{cases} GB' = \frac{1}{2}GA \\ (\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{GB'}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$ إذن : نسبة التشابه S_4 هي $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

<u>التمرين ــ 16</u>

ABCD مربع ضلعه 1 و مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

I هو منتصف القطعة [AO]

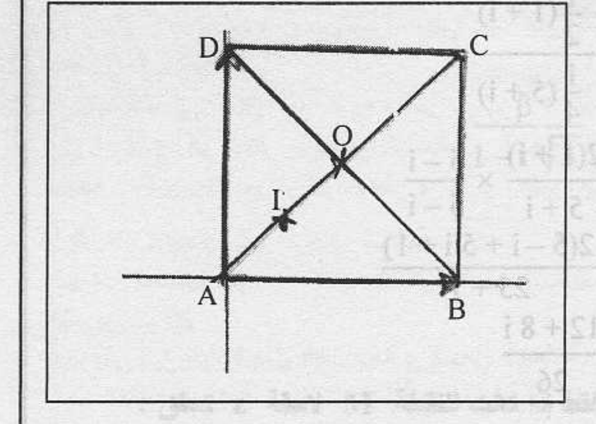
S تشابه مباشر يحول A إلى O و يحول B إلى I

1 ــ عين نسبة و زاوية التشابه S

2 ــ أعط كتابة مركبة للتشابه S باعتبار المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$

3 ــ نسمي w مركز التشابه S . برهن أن المستقيمان (wA) و (wD) متعامدان

<u>الحـل ــ 16</u>



1 ـ $\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases}$

لتكن θ زاوية التشابه المباشر S و k نسبته

لدينا : $\begin{cases} k = \frac{OI}{AB} \\ (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{OI}) = \theta \end{cases}$

من خواص المربع أن قطراه متناصفان و متعامدان و منصفان للزوايا

إذن : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ منه $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4}$ و خاصة $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{4}$

منه : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{OI}) = -\frac{3\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{3\pi}{4}$

من جهة أخرى : في المثلث AOB لدينا :

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{OA}{AB} = \frac{2\,OI}{AB}$ أي : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\,OI}{AB}$

منه : $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{OI}{AB}$

إذن : $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$

نتيجة : نسبة التشابه s هي $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و زاويته $-\frac{3\pi}{4}$

2 ــ بإعتبار المعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$ و طول ضلع المربع ABCD هو 1 فإن لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب 0 ، 1 ، $1+i$ ، i منه لاحقة المركز O هي : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

و لاحقة النقطة I هي : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(0) + \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \;......... (1) \\ \alpha(1) + \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \;.........(2) \end{cases}$

من (1) : $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

بالتعويض في (2) : $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right) z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

تحقيق : $\left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{4}\left|-1 - i\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ إذن : نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right) = -\frac{3\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{3\pi}{4}$

3 ــ لنبحث عن w مركز التشابه S :

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i} = \frac{\frac{1}{2}(1+i)}{\frac{1}{4}(5+i)}$$

$$= \frac{2(1+i)}{5+i} \times \frac{5-i}{5-i}$$

$$= \frac{2(5 - i + 5i + 1)}{25 + 1}$$

$$= \frac{12 + 8i}{26}$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{4}{13}\,i$$

منه : مركز التشابه S هو النقطة $w\left(\frac{6}{13} ; \frac{4}{13}\right)$

3 ـ $\overrightarrow{Aw}\begin{pmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{wD}\begin{pmatrix} 0 - \frac{6}{13} \\ 1 - \frac{4}{13} \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{wD}\begin{pmatrix} \frac{-6}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{Aw}\,.\,\overrightarrow{wD} = \frac{6}{13}\left(\frac{-6}{13}\right) + \frac{4}{13}\left(\frac{9}{13}\right)$

$$= \frac{-36}{169} + \frac{36}{169}$$

$= 0$ إذن : $\overrightarrow{Aw} \perp \overrightarrow{wD}$

منه : المستقيمان (wA) و (wD) متعامدان

التمرين ـ 17

أختر الجواب الصحيح في كل سؤال ممايلي :

1 ـ التحويل الذي عبارته المركبة $z' = 2\,i\,z - 3$ هو :

أ) تناظر مركزه $w(-3 ; 2)$

ب) تناظر محوري محوره المنصف الأول

جـ) تشابه مباشر مركزه $w\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{6}{5}\right)$

د) تشابه مباشر مركره $w(-3 ; 2)$

2 ـ التعريف المركب للتشابه ذو النسبة $\sqrt{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$ و المركز $w(1 ; \sqrt{3})$ هو :

أ) $z' = \sqrt{3}\,z + 4$ **جـ) $z' = i\sqrt{3}\,z + 1 + i\sqrt{3}$**

ب) $z' = i\sqrt{3}\,z + 4$ **د) $z' = i\sqrt{3\,z} + 4$**

الحـل ـ 17

1 ـ $z' = 2\,i\,z - 3$ من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$

لدينا : $|2\,i| = 2$ إذن : التحويل تشابه مباشر نسبته 2

$\mathrm{Arg}(2\,i) = \frac{\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$

$\frac{-3}{1-2\,i} = \frac{-3(1+2\,i)}{(1-2\,i)(1+2\,i)} = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\,i$ إذن : مركز التشابه هو $w\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{6}{5}\right)$

نتيجة : الجواب الصحيح هو جـ) تشابه مباشر مركزه $w\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{6}{5}\right)$

2 ـ التشابه المباشر ذو المركز $w(1 ; \sqrt{3})$ و النسبة $\sqrt{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$ له

التعريف المركب التالي : $z' = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)z + \beta$

أي : $z' = i\sqrt{3}\,z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - i\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

منه : $\beta = (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = 4$

أي : $z' = i\sqrt{3}\,z + 4$

نتيجة : الجواب الصحيح هو : ب) $z' = i\sqrt{3}\,z + 4$

التمرين ـ 18

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب a و b

يكون المثلث MAB قائم و متساوي الساقين و مباشر رأسه M إذا وفقط إذا كانت للنقطة M لاحقة z تحقق :

أ) $z = \dfrac{b - i\,a}{1 - i}$ جـ) $z - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - a)$

ب) $a - z = i(b - z)$ د) $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$

الحل – 18

يكون المثلث MAB قائم و متساوي الساقين و مباشر رأسه M إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} \\ MB = MA \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} \text{Arg}(b - z) - \text{Arg}(a - z) = \dfrac{\pi}{2} \\ |b - z| = |a - z| \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} \text{Arg}\left(\dfrac{b - z}{a - z}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{b - z}{a - z}\right| = 1 \end{cases}$$

منه :
$$\frac{b - z}{a - z} = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

أي :
$$\frac{b - z}{a - z} = i$$

أي :
$$b - z = i(a - z)$$

منه :
$$b - z = i\,a - i\,z$$

أي :
$$b - i\,a = z - i\,z$$

أي :
$$b - i\,a = z(1 - i)$$

أي :
$$z = \frac{b - i\,a}{1 - i}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو : أ) $z = \dfrac{b - i\,a}{1 - i}$

التمرين – 19

A و B نقطتان متمايزتان . I منتصف $[AB]$

f تشابه مباشر مركزه A ، نسبته 2 و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$

g تشابه مباشر مركزه A و نسبته $\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

ليكن h التناظر المركزي ذو المركز I

اختر الجواب الصحيحممايلي :

أ) $hogof$ دوران يحول A إلى B

ب) $hogof$ تناظر بالنسبة إلى محور القطعة $[AB]$

جـ) $hogof$ ليس تشابها مباشرا

د) $hogof$ انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$

الحل – 19

من خواص التشابهات أن مركب تشابهين ذات نفس المركز هو تشابه ذات المركز نفسه و النسبة جداء النسبتين و زاويته هو مجموع الزاويتين

و عليه التحويل gof هو تشابه مباشر مركزه A و نسبته $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ و زاويته $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$

إذن : gof هو تناظر مركزي بالنسبة إلى النقطة A

نتيجة : $hogof$ هو مركب تناظر مركزي بالنسبة إلى A و تناظر مركزي بالنسبة إلى I

إذن : $hogof$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$

الجواب الصحيح هو د) $hogof$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$

التمرين – 20

فيما يلي ميز بين الجمل الصحيحة و الجمل الخاطئة

1 – الكتابة المركبة $z' = 2\,i\,z$ تعرف تشابه مباشر نسبته 4

2 ــ الكتابة المركبة $z' = 3z + 4$ تعرف تحاك نسبته 3

3 ــ الكتابة المركبة $z' = (1 + i)z$ تعرف تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{4}$

4 ــ الكتابة المركبة $z' = -3iz + 3i$ تعرف تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ 3

الحل ــ 20

1 ــ خاطئ نسبة التشابه هي 2

2 ــ صحيح .

3 ــ صحيح .

4 ــ صحيح .

التمرين ــ 21

ميز بين الجمل الصحيحة و الخاطئة في ما يلي :

1 ــ التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو تشابه مباشر

2 ــ الدوران في المستوي هو تشابه مباشر نسبته 1

3 ــ التحاكي في المستوي هو تشابه مباشر له نفس المركز و نفس النسبة

4 ــ التناظر المركزي في المستوي هو تشابه مباشر زاويته π و له نفس المركز

5 ــ مبدأ المعلم هو مركز لكن تشابه مباشر معرف بـــ $z' = (a + bi)z$ حيث a و b عددين مركبين

الحل ــ 21

1 ــ خاطئ : التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو مركب تشابه مباشر و تناظر محوري بالنسبة إلى محور الفواصل إذن فهو تشابه غير مباشر

2 ــ صحيح

3 ــ خاطئ لأن نسبة التحاكي قد تكون عدد حقيقي سالب .

4 ــ صحيح

5 ــ صحيح من أجل $a + bi \neq 1$ و $a + bi \neq 0$

التمرين ــ 22

w نقطة ذات اللاحقة 2 . S تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ما قولك عن العبارات التالية :

1 ــ التحويل S هو تشابه مباشر للمستوي

2 ــ التحويل S له نقطة صامدة وحيدة هي $w(2 ; 0)$

3 ــ المثلث wMM' قائم في M'

4 ــ $(\overrightarrow{wM'} ; \overrightarrow{wM}) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ حيث $k \in Z$

5 ــ R دوران ذات المركز O و الزاوية $-\frac{\pi}{6}$. التحويل SoR هو تحاكي .

الحل ــ 22

العبارة المركبة للتحويل S من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ إذن : S هو تشابه مباشر للمستوي وعناصره كمايلي :

النسبة : $\left|\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}\,|\sqrt{3} + i| = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الزاوية : $\text{Arg}\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right) = \text{Arg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{6}$

المركز : $\dfrac{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})}{\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})} = 2$

نتائج :

أ) S تشابه مباشر للمستوي مركزه $w(2\,;\,0)$ و نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

ب) إذا كانت $M' = S(M)$ فإن : $\left\{\begin{array}{l}(\overrightarrow{wM}\,;\,\overrightarrow{wM'}) = \frac{\pi}{6} \\ wM' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,wM\end{array}\right.$ منه $(\overrightarrow{wM'}\,;\,\overrightarrow{wM}) = -\frac{\pi}{6}$

إذن : $\frac{wM'}{wM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لكن $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : المثلث wMM' قائم الزاوية وتره $[wM]$ إذن : قائم في M'

جـ) إذا كان R دوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$ فإن شكله المركب :

$z' = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] z$ أي $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

إذن :

$$z \xrightarrow{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) z \xrightarrow{S} z' = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) z\right] + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(3+1)\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

إذن : التحويل SoR له الشكل المركب $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

منه : SoR هو تحاكي للمستوي نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

و بناء على هذه النتائج فإن كل من العبارات المقترحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 صحيحة .

المقاطع المستوية للسطوح

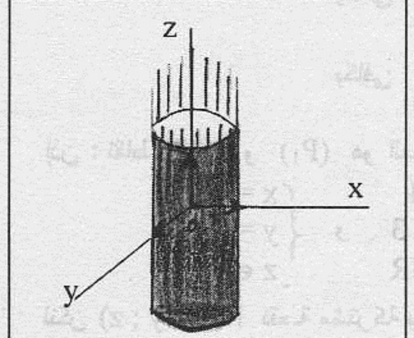
في كل الدرس نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

1 ـ السطح الأسطواني الدوراني

تعريف : (C) دائرة مركزها o و نصف قطرها R حيث $R > 0$ من المستوي $(x o y)$

نسمي سطح أسطواني دوراني محوره (oz) و نصف قطره R مجموعة المستقيمات الموازية للمحور (oz) و التي تشمل نقطة من الدائرة (C)

كل مستقيم من هذه المستقيمات يسمى مولدا لهذا السطح .



معادلة السطح الأسطواني الدوراني

السطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R هو

مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث

$x^2 + y^2 = R^2$ و تسمى هذه العلاقة معادلة ديكارتية للسطح الأسطواني الدوراني .

ملاحظة : في المعادلة $x^2 + y^2 = R^2$ لا يظهر الراقم z فإذن $z \in IR$

منه السطح الدوراني الأسطواني غير محدود .

مقطع مستوى يوازي $(x o y)$ بسطح أسطواني دوراني محوره (oz)

ليكن (P) مستوي يوازي $(x o y)$ معادلته $z = a$ حيث $a \in IR$

مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R

هو الدائرة (C) من المستوي (P) و التي مركزها $w(0 ; 0 ; a)$ و نصف قطرها R .

مقطع مستوي يوازي $(x o z)$ بسطح أسطواني دوراني محوره (oz)

ليكن (P) مستوي يوازي $(x o z)$ معادلته $y = a$ حيث $a \in IR$

ليكن Σ مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R . نميز الحالات التالية :

1 ـ $|a| > R$: Σ مجموعة خالية (لا يوجد تقاطع)

2 ـ $|a| = R$: Σ هو المستقيم ذو المعادلة $y = a$ موازي لـ (oz)

3 ـ $|a| < R$: Σ هو اتحاد مستقيمين معرفين بالتمثيلين الوسيطيين :

$$\begin{cases} y = a \\ x = -\sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = a \\ x = \sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases}$$

مقطع مستوي يوازي $(y o z)$ بالسطح الأسطواني الدوراني ذو المحور (oz)

ليكن (P) مستوي يوازي $(y o z)$ معادلته $x = a$ حيث $a \in IR$

ليكن Σ مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R . نميز الحالات التالية :

1 ـ $|a| > R$: Σ مجموعة خالية (لا يوجد تقاطع)

2 ـ $|a| = R$: Σ هو المستقيم ذو المعادلة $x = a$ موازي لـ (oz)

3 ـ $|a| < R$: Σ هو اتحاد مستقيمين معرفين بالتمثيلين الوسيطيين :

$$\begin{cases} x = a \\ y = -\sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases}$$

نشاط :

ليكن (S) السطح الأسطواني الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$

1 ـ a) عين تقاطع السطح (S) مع المستويات التي معادلاتها $x = 4$ ؛ $x = -5$ ؛ $x = 7$

b) مثل بالإنشاء السطح (S) و المستويات السابقة .

2 ـ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x = k$ حيث $k \in IR$
ناقش حسب قيم k تقاطع السطح (S) و المستوي (P)

3 ـ ليكن $k \in [-5 ; 5]$. نعتبر المستقيمات (D_k) ذات التمثيل الوسيطي التالي :

$\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases}$ والمستقيمات (T_k) ذات التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases}$

a) تحقق أن (D_k) و (T_k) محتويان في السطح (S)

b) بين أن السطح (S) هو اتحاد المستقيمات (D_k) و (T_k) لما k يمسح المجال $[-5 ; 5]$

الحـل :

1 ـ a) لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين السطح (S) و المستوي (P_1) ذو المعادلة $x = 4$

إذن : $\begin{cases} x = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 4 \\ 16 + y^2 = 25 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 4 \\ y \in \{-3 ; 3\} \end{cases}$

إذن : تقاطع (S) و (P_1) هو المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين :

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z \in IR \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z \in IR \end{cases}$

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المستوي (P_2) ذو المعادلة $x = -5$

إذن : $\begin{cases} x = -5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = -5 \\ 25 + y^2 = 25 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$

منه : تقاطع (S) و المستوي (P_2) ذو المعادلة $x = -5$ هو المستقيم ذو التمثيل الوسبطي

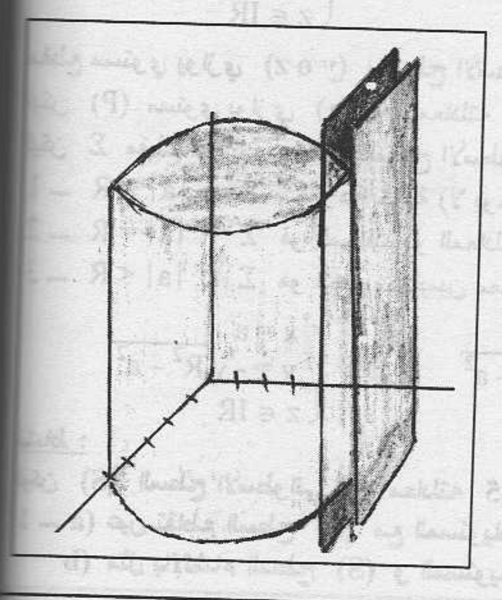
$\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \\ z \in IR \end{cases}$

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المستوي (P_3) ذو المعادلة $x = 7$

إذن : $\begin{cases} x = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 7 \\ 49 + y^2 = 25 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 7 \\ y^2 = -24 \end{cases}$ مستحيل

إذن : السطح (S) لا بقطع المستوي ذو المعادلة $x = 7$



2 ـ $\begin{cases} x = k \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = k \\ k^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = k \\ y^2 = 25 - k^2 \end{cases}$

المناقشة :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - k^2$		−	0	+	0	−	

الحالة (1) $k \in \{-5 ; 5\}$ الجملة تكافئ $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$

إذن : (S) و (P) يتقاطعان في مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$

الحالة (2) $k \in]-\infty ; -5[\cup]5 ; +\infty[$ الجملة لا تقبل حلول

إذن : (S) و (P) لا يتقاطعان .

الحالة (3) $k \in]-5 ; 5[$ الجملة تكافئ $\begin{cases} x = k \\ y = \pm\sqrt{25-k^2} \end{cases}$

إذن : المستوي (P) و (S) يتقاطعان في مستقيمين تمثيلاهما الوسيطيين

$\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25-k^2} \end{cases}$ و $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25-k^2} \end{cases}$

3 – a) لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من (D_k) إذن : $\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25-k^2} \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = 25 - k^2 + k^2$

أي : $x^2 + y^2 = 25$ منه $M \in (S)$ إذن : $(D_k) \subset (S)$

لتكن $N(x ; y ; z)$ نقطة من (T_k) إذن : $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25-k^2} \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = 25 - k^2 + k^2$

أي : $x^2 + y^2 = 25$ منه $N \in (S)$ إذن : $(T_k) \subset (S)$

نتيجة : كل من (D_k) و (T_k) محتويان في (S)

b) لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من (P) إذن : $x^2 + y^2 = 25$

منه $\begin{cases} x = k \\ k^2 + y^2 = 25 \\ -5 \leq k \leq 5 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = k \\ y^2 = 25 - k^2 \\ -5 \leq k \leq 5 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = k \\ y = \pm\sqrt{25-k^2} \\ -5 \leq k \leq 5 \end{cases}$

أي $M \in (D_k) \cup (T_k)$

منه : $(S) \subset ((D_k) \cup (T_k))$

نتيجة : $(S) \subset ((D_k) \cup (T_k))$ و $((D_k) \cup (T_k)) \subset (S)$

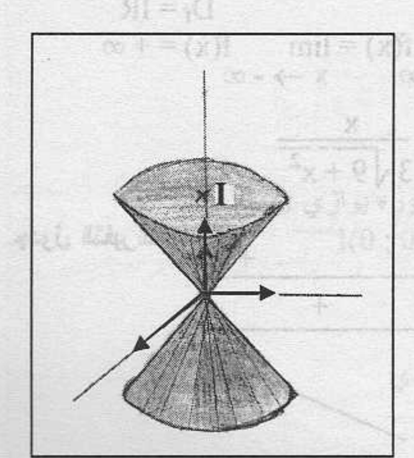
إذن : $(S) = (T_k) \cup (D_k)$ و هو المطلوب

2 – سطح مخروط دوراني

تعريف :

I نقطة من المحور (oz) . (C) دائرة من مستوي موازي للمستوي (x o y)
مركزها I مجموعة المستقيمات التي تمر من النقطة o و تشمل نقطة من الدائرة (C)
تسمى سطح المخروط الدوراني ذو القاعدة (C) و الرأس 0
كل مستقيم من هذه المستقيمات هو مولدا لهذا السطح المخروطي الدوراني

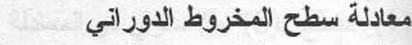
الانشاء :



معادلة سطح المخروط الدوراني

سطح المخروط الدوراني الذي محوره (oz) و قاعدته الدائرة (C) ذات المركز $I(0 ; 0 ; a)$ و نصف القطر R و الذي رأسه o هو مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{a}\right)^2 z^2$

ملاحظة : العكس صحيح حيث مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء التي تحقق $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ حيث $k \neq 0$ هي سطح مخروط دوراني رأسه o و قاعدته الدائرة (C) ذات المركز $I(0 ; 0 ; 1)$ و نصف القطر $|k|$ التي تقع على السطح $z = 1$ (بوضع $a = 1$ فإن $R = k$)



مقطع سطح مخروط دوراني بمستوي يوازي (x o y)

ليكن (P) مستوي يوازي (x o y) معادلته $z = t$ حيث $t \in IR$

مقطع المستوي (P) بسطح المخروط الدوراني الذي رأسه o و محوره (oz) هو :

a) النقطة $O(0\,;0\,;0)$ إذا كان $t = 0$

b) دائرة ذات المركز $I(0\,;0\,;t)$ من المستوي (P) إذا كان $t \neq 0$

نشاط :

ليكن (C) السطح المخروطي الدوراني ذو المعادلة $x^2 + y^2 = 9z^2$

1 ـ بين أن تقاطع (C) مع المستوي (P) ذو المعادلة $z = 2$ هو دائرة يطلب معادلتها في المستوي (p) و مركزها .

2 ـ لتكن A نقطة ذات الاحداثيات $(3\,;0\,;0)$ و (Q) المستوي ذو المعادلة $x = 3$. أكتب في المعلم $(A\,;J\,;K)$ للمستوي (Q) معادلة تقاطع (C) مع (Q)

3 ـ مثل بيانيا هذا التقاطع في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

الحـل :

1 ـ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9z^2 \\ z = 2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ z = 2 \end{cases}$

و هي معادلة دائرة مركزها $I(0\,;0\,;2)$ في المستوي ذو المعادلة $z = 2$

و نصف قطرها $\sqrt{36} = 6$

2 ـ $\begin{cases} x = 3 \\ x^2 + y^2 = 9z^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ 9 + y^2 = 9z^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ z^2 = \dfrac{9 + y^2}{9} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ z = \pm \dfrac{\sqrt{9 + y^2}}{3} \end{cases}$

نتيجة : تقاطع المستوي (Q) و (C) هو اتحاد المنحنيين ذو المعادلتين

$z = \dfrac{\sqrt{9 + y^2}}{3}$ و $z = \dfrac{-\sqrt{9 + y^2}}{3}$ في المستوي (Q)

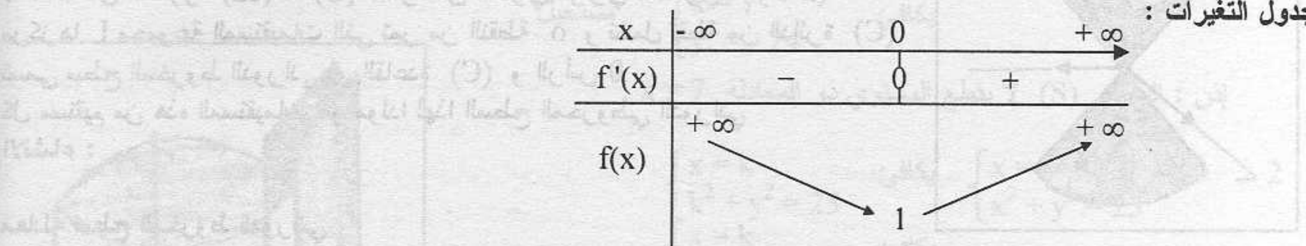
الانشاء : بدراسة تغيرات الدالة $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$ كمايلي :

$D_f = IR$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

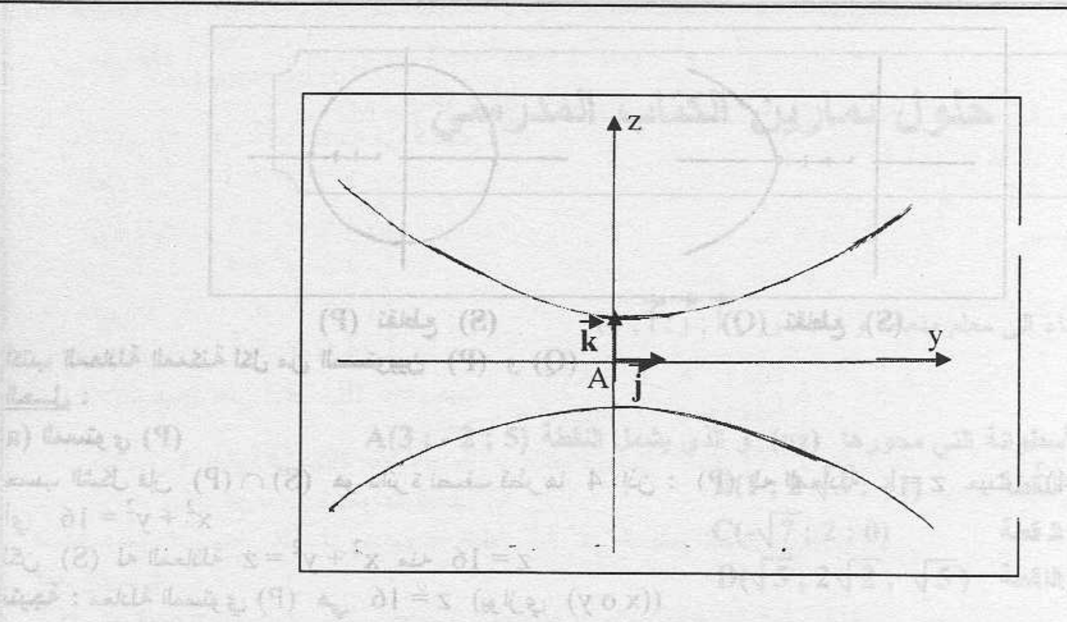
$f'(x) = \dfrac{x}{3\sqrt{9 + x^2}}$ من اشارة x

جدول التغيرات :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

ملاحظة : برسم منحنى الدالة f يمكن استنتاج منحنى الدلة g حيث $g(x) = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل (oy) كما يلي :



3 ـ المجسم المكافئ

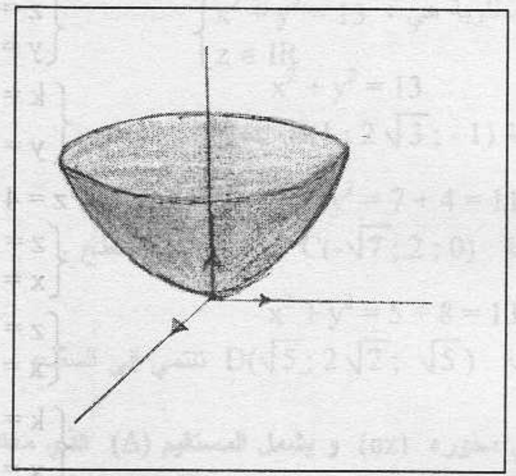
تعريف (1)

f دالة عددية لمتغيرين في معلم للفضاء . التمثيل البياني لمجموعة النقط M ذات الاحداثيات (x ; y ; z) من الفضاء حيث $z = f(x ; y)$ يسمى المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

تعريف (2)

في الفضاء المنسوب إلى معلم ، المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ تسمى مجسم مكافئ محوره (oz)

الانشاء :



نتائج : لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ (مجسم مكافئ)

(1) مقطع المساحة (S) بالمستوي ذو المعادلة $x = a$ أو $y = a$ هو قطع مكافئ محوره يوازي (oz)

(2) مقطع المساحة (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = a$ هو دائرة مركزها النقطة $I(0 ; 0 ; a)$

4 ـ المجسم الزائدي

تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم ، المساحة (S) التي معادلتها $z = x\,y$ تسمى مجسم زائدي

نتائج : ليكن (S) مجسم زائدي معادلته $z = x\,y$

(1) مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $x = a$ أو $y = a$ هو مستقيم

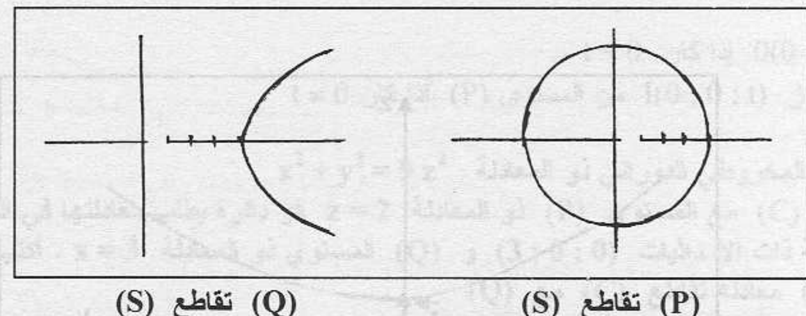
(2) مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = a$ هو إما قطع زائد أو اتحاد المستقيمين (ox) و (oy)

نشاط :

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$

(P) و (Q) مستويان كل منهما يوازي (x o y) أو (x o z) أو (y o z)

تقاطع (P) و (Q) مع (S) ممثل في الشكلين التاليين :



(S) تقاطع (Q)   (S) تقاطع (P)

أكتب المعادلة الممكنة لكل من المستويين (P) و (Q)

الحــل :

a) المستوي (P)

حسب الشكل فإن $(S)\cap(P)$ هو دائرة نصف قطرها 4 إذن : (P) له المعادلة $z = k$ حيث $x^2 + y^2 = (4)^2$

أي $x^2 + y^2 = 16$

لكن (S) له المعادلة $x^2 + y^2 = z$ منه $z = 16$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي $z = 16$ (يوازي $(x\,o\,y)$)

b) المستوي (Q)

حسب الشكل فإن $(S)\cap(Q)$ هو قطع مكافئ إذن معادلة المستوي (Q) هي إما $y = k$ أو $x = k$

من أجل $y = k$ نحصل على : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = k \end{cases}$

منه : $\begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases}$

أي : $\begin{cases} k = \pm\sqrt{z - x^2} \\ y = k \end{cases}$

حسب الشكل فإن ذروة القطع المكافئ تحقق $z = 4$ منه $k = \pm 2$

من أجل $x = k$ نحصل على : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$

أي $\begin{cases} z = k^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$

أي $\begin{cases} k = \pm\sqrt{z - y^2} \\ x = k \end{cases}$

حسب الشكل فإن ذروة القطع المكافئ تحقق $z = 4$ منه $k = \pm 2$

نتيجة : المعادلات الممكنة للمستوي (Q) هي :

$y = -2$ ؛ $y = 2$ ؛ $x = -2$ ؛ $x = 2$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين ننسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

التمرين ـــ 1

1 ـــ أكتب معادلة لسطح الأسطوانة التي محورها (oz) و الذي يشمل النقطة $A(3 ; -2 ; 5)$

2 ـــ هل هذا السطح يشمل النقطة $B(1 ; 2\sqrt{3} ; -1)$

3 ـــ هل هذا السطح يشمل الـ قطة $C(-\sqrt{7} ; 2 ; 0)$

4 ـــ هل هذا السطح يشمل النقطة $D(\sqrt{5} ; 2\sqrt{2} ; \sqrt{5})$

الحـل ـــ 1

1 ـــ السطح الأسطواني محوره (oz) إذن معادلته من الشكل $x^2 + y^2 = k^2$ حيث k هو نصف قطر قاعدته

بما أن النقطة $A(3 ; -2 ; 5)$ تنتمي إلى السطح فإن : $(3)^2 + (-2)^2 = k^2$

أي : $k^2 = 13$

نتيجة : معادلة السطح الأسطواني المطلوبة هي : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ z \in IR \end{cases}$

2 ـــ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 13$

منه : النقطة $B(1 ; 2\sqrt{3} ; -1)$ تنتمي إلى السطح .

3 ـــ $\begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = 2 \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 7 + 4 = 11$

إذن النقطة $C(-\sqrt{7} ; 2 ; 0)$ لا تنتمي إلى السطح .

4 ـــ $\begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 5 + 8 = 13$

منه : النقطة $D(\sqrt{5} ; 2\sqrt{2} ; \sqrt{5})$ تنتمي إلى السطح .

التمرين ـــ 2

أكتب معادلة السطح الأسطواني الذي محوره (oz) و يشمل المستقيم (Δ) الذي معادلته $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

الحـل ـــ 2

السطح الأسطواني محوره (oz) إذن : معادلته $\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ z \in IR \end{cases}$

بما أن السطح يشمل نقط المستقيم ذو المعادلة $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ فإن كل النقط ذات الاحداثيات $(-4 ; 3 ; z)$ تحقق معادلة السطح الأسطواني .

إذن : $(-4)^2 + (3)^2 = k^2$

أي : $k^2 = 25$

نتيجة : معادلة السطح الأسطراني هي $x^2 + y^2 = 25$

التمرين ـــ 3

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء حيث $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

1 ـــ بين أن النقط M تقع على سطح أسطواني (C) محوره (oz) و نصف قطر قاعدته 1

2 ـــ هل مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ لما يمسح t مجموعة الأعداد الحقيقية IR هي السطح الأسطواني (C) ؟

الحـل ـــ 3

1 ـــ معادلة السطح الأسطواني (C) الذي محوره (oz) و نصف قطر قاعدته 1 تكتب من الشكل : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z \in IR \end{cases}$

من أجل $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ فإن : $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

إذن : $M \in (C)$

2 ـ لتكن $N(x ; y ; z)$ نقطة من السطح (C)

إذن : $x^2 + y^2 = 1$

منه : $\begin{cases} -1 \leq x^2 \leq 1 \\ -1 \leq y^2 \leq 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

إذن : يوجد على الأقل $t \in IR$ حيث $\begin{cases} \cos t = x \text{ أو } \sin t = x \\ \cos t = y \text{ أو } \sin t = y \end{cases}$

منه لما t يتغير في IR فإن x و y يتغيران على المجال $[-1 ; 1]$

إذن : (C) جزء من مجموعة النقط M

نتيجة : لما t يمسح IR فإن مجموعة النقط M هي السطح الأسطواني (C)

التمرين ـ 4

(C) هو السطح الأسطواني الذي محوره (oz) و يشمل النقطة $A(1 ; 2 ; 3)$

1 ـ عين معادلة السطح (C)

2 ـ ميز مقاطع السطح (C) بالمستويات التي معادلاتها :

$x = 2$ (a $\quad y = -3$ (b $\quad z = -4$ (c

الحـل ـ 4

1 ـ السطح الأسطواني (C) محوره (oz) إذن معادلته $x^2 + y^2 = k^2$

إذن $A \in (C)$: $(1)^2 + (2)^2 = k^2$

منه : $k^2 = 5$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي : $x^2 + y^2 = 5$

2 ـ a) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x = 2$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 4 + y^2 = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

نتيجة : تقاطع (C) و المستوي (P) ذو المعادلة $x = 2$ هو اتحاد المستقيمين ذو التمثيلين الوسيطيين :

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

b) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $y = -3$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 9 + y^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases}$ مستحيل

نتيجة : السطح (C) لا يقطع المستوي (Q) ذو المعادلة $y = -3$

c) ليكن (R) المستوي ذو المعادلة $z = -4$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = -4 \end{cases}$ إذن : تقاطع السطح (C) و المستوي (R) هي الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; -4)$

و نصف قطرها $\sqrt{5}$ من المستوي (R) ذو المعادلة $z = -4$

التمرين ـ 5

(C) هو السطح المخروطي الدوراني الذي رأسه o و محوره (oz) و الذي يشمل النقطة $A(1 ; 2 ; 3)$

1 ـ عين معادلة للسطح (C)

2 ـ ميز مقاطع السطح (C) بالمستويات التي معادلاتها :

$z = 1$ (a $\quad z = -2$ (b $\quad x = y$ (c

الحـل ــ 5

1 ــ (C) سطح مخروط دوراني محوره (oz) و رأسه o إذن له المعادلة $x^2 + y^2 = k^2 z^2$

$A \in (C)$ إذن : $(1)^2 + (2)^2 = k^2 (3)^2$.

أي $9k^2 = 5$ منه $k^2 = 5/9$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي : $x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2$

2 ــ a) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} \\ z = 1 \end{cases}$$

إذن : $(C) \cap (P)$ هي الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; 1)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{3}$ من المستوي (P)

b) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $z = -2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ z = -2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} (4) \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{20}{9} \\ z = -2 \end{cases}$$

إذن : $(C) \cap (Q)$ هي الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; -2)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{20}}{3}$ من المستوي (Q)

c) ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $x = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + x^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{ يكافئ } \begin{cases} 2x^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 = \frac{5}{18} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{ يكافئ } \begin{cases} x = \pm z\sqrt{\frac{5}{18}} \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{ يكافئ } \begin{cases} x = z\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = z\sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -z\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -z\sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$$

نتيجة : $(\pi) \cap (C)$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين كمايلي :

$$\begin{cases} x = t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ z = t \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = -t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ z = t \end{cases} \text{ حيث } t \in IR$$

التمرين ــ 6

(D) هو المستقيم الذي يمر بالمبدأ o و شعاع توجيهه $\vec{u}$ حيث : $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$

ليكن (C) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (oz) و يحوي المستقيم (D)

1 ــ عين معادلة السطح (C).

2 ــ عين العدد الحقيقي الموجب a حتى يكون مقطع (C) بالمستوي الذي معادلته $z = a$ هو دائرة (Γ) نصف

قطرها 2 حيث يطلب احداثيات مركزها .

الحـل – 6

1 – $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$ إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو : $\begin{cases}x = 2t\\y = 0\\z = -t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

(C) سطح مخروطي دوراني محوره (oz) إذن له المعادلة : $x^2 + y^2 = k^2 z^2$

بما أن (D) محتوى في (C) فإن : $(2t)^2 + (0)^2 = k^2(-t)^2$

أي : $4t^2 = k^2 t^2$

إذن : $k^2 = 4$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي $x^2 + y^2 = 4z^2$

2 – ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $z = a$ حيث $a > 0$

$\begin{cases}x^2 + y^2 = 4z^2\\z = a\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x^2 + y^2 = 4a^2\\z = a\end{cases}$

إذن : $(C) \cap (\pi)$ هو الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; a)$ و نصف قطرها $2|a|$ من المستوي (π)

نتيجة : يكون $(C) \cap (\pi)$ دائرة نصف قطرها 2 إذا و فقط إذا كان $2|a| = 2$ أي $2 = 2\,a$ لأن $a > 0$

منه : $a = 1$

إذن : (Γ) مركزها $I(0 ; 0 ; 1)$ من أجل $a = 1$

التمرين – 7

(P) و (Q) مستويان معادلاتهما على الترتيب $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ و $2x - z = 0$

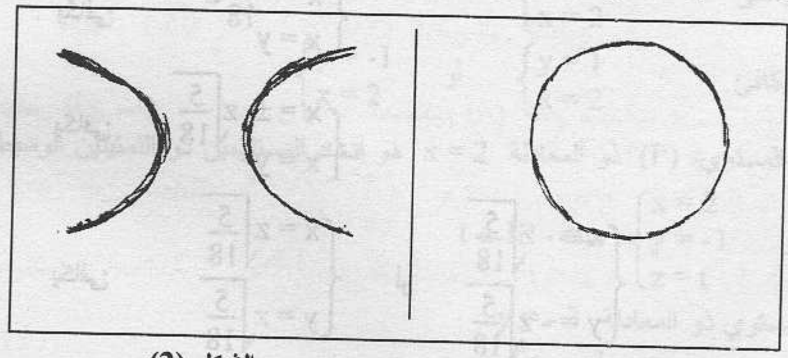
1 – أثبت أن (P) و (Q) ليسا متوازيان .

2 – أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (P) و (Q)

3 – ليكن (H) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (ox) و يشمل المستقيم (D) كمولد

بين أن معادلة (H) هي : $y^2 + z^2 = 7x^2$

4 – إليك الشكلين التاليين الممثلين لتقاطع (H) مع مستويات موازية لمحاور الاحداثيات .



الشكل (2)　　**الشكل (1)**

عين في كل حالة من الحالتين معادلة للمستويات الممكنة :

5 – بين أن المعادلة $x^2 \equiv 3[7]$ ذات المجهول الصحيح x لا تقبل حلولا في Z

6 – بين صحة الخاصية التالية : لكل عددين صحيحين a و b فإن إذا كان 7 يقسم $a^2 + b^2$

فإن 7 يقسم a و 7 يقسم b

7 – a ، b ، c أعداد صحيحة غير معدومة .

بين أنه إذا كانت $A(a ; b ; c)$ نقطة من (H) فإن الأعداد a ، b ، c مضاعفات العدد 7

الحـل – 7

1 – $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (Q)

$\frac{2}{1} \neq \frac{0}{\sqrt{3}}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان .

منه المستويان (P) و (Q) ليسا متوازيان

2 ـ $\begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2(2x) = 0 \\ z = 2x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y\sqrt{3} = 3x \\ z = 2x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ z = 2x \end{cases}$

نتيجة : المستقيم (D) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

3 ـ (H) سطح المخروط الدوراني ذو المحور (ox) إذن (H) له المعادلة $y^2 + z^2 = k^2 x^2$ حيث $k \in IR$

(D) مولد للسطح (H) إذن : كل نقطة من (D) تحقق معادلة (H)

منه : $(x\sqrt{3})^2 + (2x)^2 = k^2 x^2$

أي : $7x^2 = k^2 x^2$

أي : $k^2 = 7$

نتيجة : معادلة (H) هي : $y^2 + z^2 = 7x^2$

4 ـ الشكل (1) : تقاطع (H) مع المستوي هو دائرة إذن : المستوي موازي لـ (y o z) و معادلته من الشكل $x = k$ حيث $k \neq 0$

الشكل (2) : تقاطع (H) مع المستوي هو قطع زائد إذن المستوي موازي لأحد المستويين (x o y) أو (x o z) و معادلته إما $y = k$ أو $z = k$ حيث $k \neq 0$

5 ـ

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^2 \not\equiv 3[7]$

إذن : المعادلة $x^2 \equiv 3[7]$ لا تقبل حلولا في Z

6 ـ ليكن a و b عددين صحيحين .

حسب السؤال 5 فإن :

$a^2 \equiv 0[7]$ أو $a^2 \equiv 1[7]$ أو $a^2 \equiv 2[7]$ أو $a^2 \equiv 4[7]$

و $b^2 \equiv 0[7]$ أو $b^2 \equiv 1[7]$ أو $b^2 \equiv 2[7]$ أو $b^2 \equiv 4[7]$

منه الحالات الممكنة التالية :

⊕ $a^2 \equiv ?[7]$ \ $b^2 \equiv ?[7]$	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

نتيجة : يكون $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $a^2 \equiv 0[7]$ و $b^2 \equiv 0[7]$

و حسب السؤال (5) فإن $a^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $a \equiv 0[7]$ و $b^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $b \equiv 0[7]$

إذن : $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $\begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases}$

7 ـ A نقطة من (H) إذن احداثياتها تحقق المعادلة $y^2 + z^2 = 7x^2$

أي : $b^2 + c^2 = 7a^2$

منه : $b^2 + c^2 \equiv 0[7]$

إذن : $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ c \equiv 0[7] \end{cases}$ حسب السؤال (6)

أي $\begin{cases} b = 7n \\ c = 7m \end{cases}$ حيث n و m أعداد صحيحة

بالتعويض في معادلة (H) نحصل على : $(7n)^2 + (7m)^2 = 7a^2$

أي : $7n^2 + 7m^2 = a^2$

أي : $7(n^2 + m^2) = a^2$

إذن : 7 يقسم a^2

منه : $a \equiv 0[7]$ حسب السؤال 5

أي $a = 7q$

نتيجة : إذا كانت $A(a ; b ; c)$ نقطة من (H) فإن : $a \equiv 0[7]$ و $b \equiv 0[7]$ و $c \equiv 0[7]$

التمرين ـ 8

لتكن النقط $A(0 ; 5 ; 5)$ و $B(0 ; 0 ; 10)$

نسمي (π) المستوي الذي معادلته $x = 0$ و لتكن (C) دائرة من (π) مركزها B و تشمل A

1 ـ بين أن المستقيم (OA) مماس للدائرة (C)

نسمي (S) الكرة الناتجة عن دوران (C) حول المحور (oz)

نسمي (T) سطح المخروط الدوراني الناتج عن دوران (OA) حول المحور (oz)

2 ـ بين أن معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = z^2$

3 ـ عين تقاطع (T) و (S) يطلب الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة

4 ـ أحد الأشكال التالية يمثل تقاطع (T) مع مستوي معادلته $x = 1$ أي هذه الأشكال مناسب ؟

الشكل (3) **الشكل (2)** **الشكل (1)**

الحـل ـ 8

1 ـ $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

لدينا : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 - 5(5) + 5(5) = 0$ إذن : $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$

لدينا (OA) و (AB) متعامدان إذن : المستقيم (OA) هو مماس للدائرة (C)

2 ـ (T) مخروط دوراني محوره (oz) إذن : معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ حيث $k \in IR$

إذن $A \in (T)$: $(0)^2 + (5)^2 = k^2 (5)^2$

أي : $25 = 25k^2$

منه : $k^2 = 1$

نتيجة : معادلة (T) هي : $x^2 + y^2 = z^2$

3 ـ لنعين معادلة سطح الكرة (S) :

نصف القطر : $AB = \sqrt{0 + 25 + 25} = \sqrt{50}$

منه معادلة (S) : $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 10)^2 = (\sqrt{50})^2$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 100 = 50$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0$

التقاطع : لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و (T) إذن :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 2z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + z^2 = z^2 \\ z^2 - 10z + 25 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (z-5)^2 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 5 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}$ معادلة دائرة مركزها (0 ; 0) و نصف قطرها 5 في المستوي ذو المعادلة $z = 5$

نتيجة : (T) و (S) يتقلطعان في دائرة مركزها (5 ; 0 ; 0) و نصف قطرها 5 من المستوي ذو المعادلة $z = 5$

4 ــ لنبحث تحليليا عن تقاطع (T) و المستوي ذو المعادلة $x = 1$:

$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 1 \\ 1 + y^2 = z^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 1 \\ z = \pm\sqrt{1 + y^2} \end{cases}$ و هي معادلة قطع زائد في المستوي ذو المعادلة $x = 1$

نتيجة : الشكل المناسب هو الشكل (3)

التمرين ــ 9

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

من أجل كل عدد حقيقي k تقاطع (S) مع المستوي ذو المعادلة $z = k$ هو المستقيم الذي يشمل $A(0 ; 1 - k ; k)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

عين معادلة ديكارتية لـــ (S)

الحـل ــ 9

لنبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل $A(0 ; 1 - k ; k)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له كد ايلي :

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 + k \\ z - k \end{pmatrix}$

منه : $\begin{cases} x = t \\ y - 1 + k = 3t \\ z - k = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 - k \\ z = k \end{cases}$ حيث $t \in IR$

لنبحث الأن عن عبارة $f(x ; y)$:

$\begin{cases} z = f(x ; y) \\ z = k \end{cases}$ إذن : $f(x ; y) = k$

نتيجة : يكفي أن نبحث عن عبارة k بدلالة x و y

لدينا $\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 - k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 3x = 3t \\ y = 3t + 1 - k \end{cases}$

منه : $3x - y = 3t - 3t - 1 + k$

أي : $3x - y = -1 + k$

أي : $k = 3x - y + 1$

نتيجة : $f(x\,;\,y) = 3x - y + 1$

منه معادلة (S) هي : $z = 3x - y + 1$

ملاحظة : (S) عبارة عن مستوي معادلته $3x - y - z + 1 = 0$

التمرين ـ 10

لتكن (S) مساحة معادلتها $z = x^2$

1 ـ عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لـ $(x\,o\,y)$

2 ـ عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لـ $(x\,o\,z)$

الحـل ـ 10

1 ـ ليكن (π) مستوي موازي لـ $(x\,o\,y)$ إذن معادلته $z = k$ حيث $k \in IR$

$\begin{cases} z = x^2 \\ z = k \end{cases}$ تكافئ $(I)\begin{cases} x^2 = k \\ z = k \end{cases}$

نميز الحالات التالية :

الأولى : $k < 0$ الجملة (I) لا تقبل حلولا إذن : $(S) \cap (\pi) = \varnothing$

الثانية : $k = 0$ الجملة (I) تكافئ $\begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

الثالثة : $k > 0$ الجملة (I) تكافئ $\begin{cases} x^2 = (\sqrt{k})^2 \\ z = k \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \sqrt{k} \\ z = k \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ z = k \end{cases}$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين هما

$\begin{cases} x = \sqrt{k} \\ y = t \\ z = k \end{cases}$ و $\begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ y = t \\ z = k \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 ـ ليكن (Q) المستوي الموازي لـ $(x\,o\,z)$ إذن معادلته $y = k$

$\begin{cases} z = x^2 \\ y = k \end{cases}$ إذن : $(S) \cap (Q)$ هو القطع المكافئ الذي معادلته $z = x^2$ من المستوي ذو المعادلة $y = k$ ،

التمرين ـ 11

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + xy$

1 ـ بين أن مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = 0$ هو اتحاد مستقيمين يطلب تعيينهما .

2 ـ أدرس مقاطع (S) بالمستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k \in IR^*$

الحـل ـ 11

1 ـ $\begin{cases} z = x^2 + xy \\ z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x(x + y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

نتيجة : تقاطع (S) و المستوي ذو المعادلة $z = 0$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين

$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 ـــ ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $z = k$ حيث $k \in IR^*$

$\begin{cases} z = x^2 + xy \\ z = k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + xy = k \\ z = k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} xy = k - x^2 \\ z = k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \\ z = k \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = \dfrac{k - x^2}{x} \\ z = k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = \dfrac{k - x^2}{x} \\ z = k \end{cases}$ لأن $k \neq 0$

نتيجة : $(\pi) \cap (S)$ هو المنحنى ذو المعادلة $y = \dfrac{k - x^2}{x}$ في المستوي ذو المعادلة $z = k$

التمرين ــ 12

نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = \sqrt{|x - y|}$

أكتب معادلة مستوي التناظر لــ (S)

الحـل ــ 12

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من (S) إذن $z = \sqrt{|x - y|}$

لكن $\sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|}$

إذن : النقطة $M'\left(y ; x ; \sqrt{|y - x|}\right)$ تنتمي إلى (S)

لنثبت أن النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة إلى المستوي (π) الذي معادلته $x - y = 0$

لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لــ (π)

من جهة أخرى : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y - x \\ x - y \\ \sqrt{|y - x|} - \sqrt{|x - y|} \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y - x \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

منه $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} (y - x) \times (1) \\ (y - x) \times (-1) \\ (y - x) \times (0) \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

نتيجة : $\overrightarrow{MM'}$ شعاع ناظمي لــ (π) أي $\overrightarrow{MM'}$ عمودي على (π)

لتكن w منتصف القطعة $[MM']$ إذن :

$w\left(\dfrac{x + y}{2} ; \dfrac{x + y}{2} ; \dfrac{\sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - x|}}{2}\right)$ أي $w\left(\dfrac{x + y}{2} ; \dfrac{x + y}{2} ; \sqrt{|x - y|}\right)$

إذن : $w \in (\pi)$ لأن $\dfrac{x + y}{2} - \dfrac{x + y}{2} = 0$ (تحقق معادلة المستوي (π))

خلاصة : $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \text{ شعاع ناظمي لـ } (\pi) \\ \text{منتصف } [MM'] \text{ تنتمي إلى } (\pi) \end{array} \right.$

إذن : M' هي نظيرة M بالنسبة إلى (π)

منه : المستوي (π) ذو المعادلة $x - y = 0$ هو مستوي تناظر لـ (S)

التمرين ـ 13

لتكن f دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين x و y معرفة كما يلي :

$f(x\,;y) = x\,e^{-x^2-y^2} + 3$ حيث e هو أساس اللوغاريتم النيبيري

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x\,;y)$

1 ـ بين أن (S) تقبل المستوي ذو المعادلة $y = 0$ كمستوي تناظر .

2 ـ لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(x\,;0)$

أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج القيمة الحدية العظمى لـ (S)

الحل ـ 13

1 ـ ليكن (π) المستوي الذي معادلته $y = 0$

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من المساحة (S) إذن : $z = x\,e^{-x^2-y^2} + 3$

لدينا نظيرة M بالنسبة إلى المستوي (π) هي $M'(x\,;-y\,;z)$

أي $M'(x\,;-y\,;x\,e^{-x^2-y^2}+3)$

منه $M' \in (S)$ إذن : (π) هو مستوي تناظر لـ (S)

2 ـ تغيرات الدالة g :

$g(x) = f(x\,;0)$ يكافئ $g(x) = x\,e^{-x^2+0} + 3$

يكافئ $g(x) = x\,e^{-x^2} + 3$

g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x\,e^{-x^2} + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x^2} + 3 = 3$$

$$g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2\,e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$1 - 2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	↘	$3 - \frac{1}{\sqrt{2e}}$	↗	$3 + \frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	3

$$g\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{2\,e}} + 3$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2\,e}} + 3$$

نتيجة : الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى على المجال IR من أجل $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و قيمتها $3 + \frac{1}{\sqrt{2\,e}}$

منه : المساحة (S) تبلغ قيمة حدية عظمى من أجل $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

أي $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2} - y^2} + 3$

أي $z = \frac{1}{\sqrt{2e}} e^{-y^2} + 3$

منه يكون z أكبر ما يسكن من أجل $y = 0$ (بدراسة الدالة $p(y) = e^{-y^2}$)

أي $z = \frac{1}{\sqrt{2e}} + 3$

خلاصة : (S) تبلغ قيمة حدية عظمى عند النقطة $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0 ; \frac{1}{\sqrt{2e}} + 3\right)$

التمرين ـــ 14

لتكن A نقطة احداثياتها $(1 ; 3 ; 0)$

نعتبر (S) المساحة التي معادلتها $z = (x-1)^2 + (y-3)^2$

1 ـــ أكتب معادلة (S) في لمعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

2 ـــ استنتج طبيعة (S) و عناصرها المميزة .

الحـل ـــ 14

1 ـــ نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \\ Z = z \end{cases}$

إذن : معادلة (s) في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ هي : $Z = X^2 + Y^2$

2 ـــ (S) لها المعادلة $Z = X^2 + Y^2$ إذن : (S) هي مجسم مكافئ محوره المستقيم الموازي للمحور (oz) و الذي يشمل النقطة $A(1 ; 3 ; 0)$

التمرين ـــ 15

نعتبر الدالة f حيث $f(x ; y) = \ln|y - x^2|$

1 ـــ عين الثنائيات $(x ; y)$ من IR^2 حتى تكون من أجلها f غير معرفة

2 ـــ لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

أدرس مقاطع المساحة (S) مع المستوي ذو المعادلة $z = k$ حيث $k \in IR^*$

الحـل ـــ 15

1 ـــ f غير معرفة يكافئ $y - x^2 = 0$

يكافئ $y = x^2$

نتيجة : f غير معرفة من أجل كل الثنائيات من الشكل $(x ; x^2)$ حيث $x \in IR$

2 ـــ ليكن (π) المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k \in IR^*$

$\begin{cases} z = \ln|y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} k = \ln|y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} e^k = |y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} e^k = y - x^2 \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} e^k = x^2 - y \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y = e^k + x^2 \\ z = k \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = x^2 - e^k \\ z = k \end{cases}$

نتيجة : $(S) \cap (\pi)$ هو اتحاد المنحنيين اللذين معادلاتاهما $y = x^2 + e^k$ و $y = x^2 - e^k$ من المستوي $z = k$

التمرين ـــ16

لتكن (T) المساحة التي معادلتها $z = y\,x^2$ حيث $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$

1 ـــ a) تحقق أن إذا كانت $M(x ; y ; z)$ نقطة من (T) فإن $N(-x ; y ; z)$ نقطة من (T)

ثم استنتج مستوي تناظر لـــ (T)

b) بين أن النقطة $O(0\,;0\,;0)$ مركز تناظر لـ (T)

2 ـ a) ما هي طبيعة منحنيات تقاطع (T) مع المستويات الموازية لـ $(x\,o\,z)$

b) ما هي طبيعة منحنيت تقاطع (T) مع المستويات الموازية لـ $(y\,o\,z)$

3 ـ a) عين تقاطع (T) مع المستوي ذو المعادلة $z=0$

b) من أجل $k>0$ نضع K النقطة التي احداثياتها $(0\,;0\,;k)$

عين في المعلم $(k\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ معادلة منحنى التقاطع بين (T) و المستوي الذي معادلته $z=k$ حيث $k>0$

الحل ـ 16

1 ـ a) $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (T) إذن : $\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\z=y\,x^2\end{cases}$

لتكن $N(-x\,;y\,;z)$ لدينا $\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}-1\le -x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$

من جهة أخرى $y(-x)^2=y\,x^2=z$

إذن : $N(-x\,;y\,;z)$ تنتمي إلى (T)

نتيجة : المستوي ذو المعادلة $x=0$ هو مستوي تناظر للمساحة (S)

b) لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (T) إذن : $\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\z=y\,x^2\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}-1\le -x\le 1\\-1\le -y\le 1\end{cases}$

من جهة أخرى : $-y(-x)^2=-y\,x^2=-z$

نتيجة : النقطة $N(-x\,;-y\,;-z)$ تنتمي إلى (T)

منه النقطة $O(0\,;0\,;0)$ هي مركز تناظر لـ (T)

2 ـ a) ليكن (π) المستوي الموازي لـ $(x\,o\,z)$ معادلته $y=k$ حيث $k\in IR$

$\begin{cases}z=y\,x^2\\-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\y=k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=k\,x^2\\y=k\\-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$

مناقشة :

إذا كان $k\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ فإن $(\pi)\cap(T)=\varnothing$

إذا كان $k\in[-1\,;1]$ فإن $(\pi)\cap(T)$ هو المنحنى الذي معادلته $\begin{cases}z=k\,x^2\\-1\le x\le 1\end{cases}$ من المستوي ذو المعادلة $y=k$

b) ليكن (Q) المستوي الموازي لـ $(y\,o\,z)$ معادلته $x=k$

$\begin{cases}z=y\,x^2\\-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\x=k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=k^2\,y\\-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\x=k\end{cases}$

مناقشة :

إذا كان $k\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ فإن $(T)\cap(Q)=\varnothing$

إذا كان $k\in[-1\,;1]$ فإن $(T)\cap(Q)$ هو القطعة المستقيمة ذات التمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=k\\z=k^2 t\\y=t\end{cases}$ حيث $t\in[-1\,;1]$

3 ـ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z=0$

$\begin{cases}z=y\,x^2\\-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y\,x^2=0\\-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\z=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=0\\z=0\\-1\le y\le 1\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=0\\z=0\\-1\le x\le 1\end{cases}$

نتيجة : $(T) \cap (P)$ هو اتحاد القطعتين المستقيمتين المعرفتين بالتمثيلين الوسيطيين

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad t \in [-1 ; 1]$$

b) ليكن (R) المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k > 0$

$$\begin{cases} z = y x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \\ z = k ;\ k > 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} k = y x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \\ z = k ;\ k > 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} k = y x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ 0 < y \le 1 \\ z = k ;\ k > 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{k} x^2 \\ -1 \le x \le 1 \ ;\ x \ne 0 \\ 0 < y \le 1 \\ z = k ;\ k > 0 \end{cases}$$

نتيجة : معادلة تقاطع (T) و المستوي (R) هي :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{k} x^2 \\ -1 \le x \le 1 \ ;\ x \ne 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$$

لندرس تغيرات الدالة $f(x) = \dfrac{1}{k} x^2$ على المجال $[-1 ; 1]$ حيث $k > 0$

$$f'(x) = \frac{2x}{k}$$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1/k$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/k$

لدينا : $\dfrac{1}{k} \le 1$ يكافئ $k \ge 1$ لأن $k > 0$

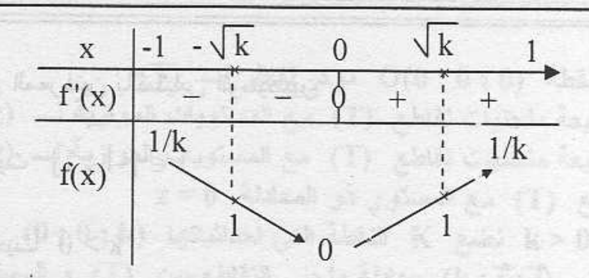
منه النتائج التالية :

1 ــ إذا كان $k \ge 1$ فإن $(T) \cap (R)$ هو قوس من المستوي (R)

معادلته $\begin{cases} y = \dfrac{1}{k} x^2 \\ -1 \le x \le 1 \ ;\ x \ne 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$ رأساه $A(-1 ; 1/k ; k)$ ؛ $B(1 ; 1/k ; k)$ باستثناء النقطة $K(0 ; 0 ; k)$

2 ــ إذا كان $0 < k < 1$ فإن $\dfrac{1}{k} > 1$

إذن : جدول تغيرات الدالة f يصبح :



في هذه الحالة $(R) \cap (T)$ هو قوس من المستوي (R) معادلته

$$\begin{cases} y = \frac{1}{k}x^2 \\ -\sqrt{k} \le x \le \sqrt{k} \ ;\ x \neq 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$$ ماعدا النقطة $K(0 \ ; 0 \ ; k)$

<u>التمرين ــ17</u>

(C) هو سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ حيث $\lambda \in IR^*$

a عدد حقيقي . نسمي Σ_a مقطع (C) بالمستوي (P_a) الذي معادلته $x = a$

و نسمي A النقطة التي احداثياتها $(a \ ; 0 \ ; 0)$

1 ــ بين أن Σ_0 هو اتحاد مستقيمين (D_1) و (D_2) شعاعا توجيههما $\vec{u_1} = \lambda\,\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{u_2} = \lambda\,\vec{j} - \vec{k}$

2 ــ M نقطة من المستوي (P_a) احداثياها $(y \ ; z)$ في المعلم $(A \ ; \vec{j} \ ; \vec{k})$ و $(Y \ ; Z)$ في المعلم $(A \ ; \vec{u_1} \ ; \vec{u_2})$

بين أن $y = \lambda Y + \lambda Z$ و $z = Y - Z$

3 ــ استنتج أن من أجل $a \neq 0$ فإن Σ_a في المعلم $(A \ ; \vec{u_1} \ ; \vec{u_2})$ له المعادلة :

$Y = \frac{c}{Z}$ حيث c ثابت حقيقي غير معدوم

<u>الحـل ــ 17</u>

1 ــ من أجل $a = 0$ فإن نقط المقطع Σ_0 هي حلول الجملة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = 0 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases} y = \lambda z \\ x = 0 \end{cases}$$ أو $$\begin{cases} y = -\lambda z \\ x = 0 \end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda t \\ z = t \end{cases}$$ أو $$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda t \\ z = t \end{cases}$$ حيث $t \in IR$

نتيجة : Σ_0 هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين هما

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda t \\ z = t \end{cases}$$ و $$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda t \\ z = t \end{cases}$$ إذن شعاعي توجيههما على الترتيب $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

أي $$\begin{cases} \vec{n_1} = o\,\vec{i} + \lambda\,\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{n_2} = o\,\vec{i} - \lambda\,\vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$ منه $$\begin{cases} \vec{n_1} = \lambda\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{n_2} = -\vec{\lambda}\,j + \vec{k} \end{cases}$$

بما أن $-\vec{u_2}$ هو أيضا شعاع توجيه لأن $\vec{n_2} \,//\, -\vec{n_2}$ فإن (D_1) و (D_2) لهما أشعة التوجيه التالية

$\vec{u_1} = \lambda.\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{u_2} = \lambda\,\vec{j} - \vec{k}$

2 ــ (α) ...... $\overrightarrow{AM} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ في المعلم $(A \ ; \vec{j} \ ; \vec{k})$

$\overrightarrow{AM} = Y\,\vec{u_1} + Z\,\vec{u_2}$ في المعلم $(A \ ; \vec{u_1} \ ; \vec{u_2})$

نعوض $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ بدلالة $\vec{j}$ و $\vec{k}$ فنحصل على مايلي :

$$\overrightarrow{AM} = Y(\lambda\,\vec{j} + \vec{k}) + Z(\lambda\,\vec{j} - \vec{k})$$

$$= Y\lambda\vec{j} + Y\vec{k} + Z\lambda\vec{j} - Z\vec{k}$$

$$= (Y\lambda + Z\lambda)\vec{j} + (Y - Z)\vec{k}$$

لكن، $\overrightarrow{AM} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

بالمطابقة نحصل على : $\begin{cases} y = Y\lambda + Z\lambda \\ z = Y - Z \end{cases}$ و هو المطلوب

3 ـ لنبحث عن Σ_a من أجل $a \neq 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = a \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a^2 + (\lambda Y + \lambda Z)^2 = \lambda^2 (Y - Z)^2 \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a^2 + \lambda^2 Y^2 + 2\lambda^2 YZ + \lambda^2 Z^2 = \lambda^2 Y^2 - 2\lambda^2 YZ + \lambda^2 Z^2 \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a^2 = -4\lambda^2 YZ \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} Y = \dfrac{a^2}{-4\lambda^2 Z} \\ x = a \end{cases}$

نضع $c = \dfrac{a^2}{-4\lambda^2}$ حيث $c \neq 0$ إذن : $\begin{cases} Y = \dfrac{c}{Z} \\ x = a \end{cases}$

نتيجة : في المعلم $(A ; \vec{u_1} ; \vec{u_2})$ Σ_a له المعادلة $Y = \dfrac{c}{Z}$ حيث c و a أعداد حقيقية غير معدومة .

التمرين ـ18

(D) و (T) مستقيمان متعامدان و ليسا من نفس المستوي حيث (D) يشمل النقطة $A(0 ; 0 ; 1)$

و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ هو شعاع توجيه له .

و (T) يشمل النقطة $B(0 ; 0 ; -1)$ و $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ شعاع توجيه له .

1 ـ تحقق أن (D) و (T) متعامدان و أنهما ليس من نفس المستوي فعلا

2 ـ لتكن Σ مجموعة نقط الفضاء المتساوية البعد عن (D) و (T)

تحقق أن O تنتمي إلى Σ

3 ـ لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء

a) أحسب بعد النقطة M عند (D) و (T)

b) استنتج أن M تنتمي إلى Σ إذا و فقط إذا كان $xy + 2z = 0$

c) استنتج تقاطع Σ مع المستويات العمودية على (AB)

d) أدرس تقاطع Σ مع المستويات العمودية على المحور $(o ; \vec{i})$ ثم المحور $(o ; \vec{j})$

الحل ـ 18

1 ـ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (T)

$\vec{u} . \vec{v} = 1 - 1 + 0 = 0$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

منه : (D) عمودي على (T)

لنعين التمثيل الوسيطي لكل من (D) و (T)

$\begin{cases} x - 0 = t \\ y - 0 = t \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ حيث $t \in IR$ هو تمثيل وسيطي لـ (D)

$\begin{cases} x - 0 = k \\ y - 0 = -k \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = -1 \end{cases}$ حيث $k \in IR$ هو تمثيل وسيطي لـ (T)

نتيجة : لا توجد أي نقطة مشتركة بين (D) و (T) لأن نقط المستقيم (D) لها راقم $z = 1$ و نقط المستقيم (T) لها راقم $z = -1$

خلاصة : $\left.\begin{matrix}(D) \text{ و } (T) \text{ متعامدان} \\ (D)\cap(T)=\varnothing\end{matrix}\right\}$ إذن : (D) و (T) ليسا من نفس المستوي

2 ـــ لتكن H مسقط النقطة O على المستقيم (D) حيث H(t ; t ; 1)

و K مسقط النقطة O على المستقيم (T) حيث K(k ; - k ; -1)

$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{OH}\\ \vec{v}\perp\overrightarrow{OK}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OH}=0\\ \vec{v}\,.\,\overrightarrow{OK}=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}1(t)+1(t)+0(1)=0\\ 1(k)-1(-k)+0(-1)=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}2t=0\\ 2k=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}t=0\\ k=0\end{cases}$

نتيجة : $H(0\,;0\,;1)$ و $K(0\,;0\,;-1)$

منه : $OH=\sqrt{0+0+1}=1$ و $OK=\sqrt{0+0+1}=1$

إذن : بعد النقطة O عن كل من المستقيمين (D) و (T) هو 1

إذن : O تنتمي إلى Σ (نفس البعد عن (D) و عن (T))

3 ـــ لتكن $M(x\,;y\,;z)$

نضع $\left\{\begin{matrix}N(t\,;t\,;1) \text{ المسقط العمودي لـ M على (D) حيث t عدد حقيقي}\\ P(k\,;-k\,;-1) \text{ المسقط العمودي لـ M على (T) حيث k عدد حقيقي}\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}x-t\\ y-t\\ z-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-k\\ y+k\\ z+1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{NM}\\ \vec{v}\perp\overrightarrow{PM}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{u}\,.\,\overrightarrow{NM}=0\\ \vec{v}\,.\,\overrightarrow{PM}=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}1(x-t)+1(y-t)+0(z-1)=0\\ 1(x-k)-1(y+k)+0(z+1)=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x-t+y-t=0\\ x-k-y-k=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x+y=2t\\ x-y=2k\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}t=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ k=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\end{cases}$

نتيجة : $N\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\,;\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\,;1\right)$ و $P\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\,;\,\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}y\,;-1\right)$

منه : $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\\ z-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ z+1\end{pmatrix}$

إذن : $NM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\right)^2+(z-1)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-2\,x\,y+y^2)+\frac{1}{4}(x^2-2\,x\,y+y^2)+z^2-2\,z+1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2-2\,x\,y+y^2)+z^2-2\,z+1}$$

و هي عبارة بعد النقطة M عن (D)

$$PM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+(z+1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x^2+2\,x\,y+y^2)+\frac{1}{4}(x^2+2\,x\,y+y^2)+z^2+2\,z+1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+2\,x\,y+y^2)+z^2+2\,z+1}$$

و هي عبارة بعد النقطة M عن (T)

b) M تنتمي إلى Σ يكافئ $NM = PM$

يكافئ $NM^2 = PM^2$ (لأن $NM > 0$ و $PM > 0$)

يكافئ $\frac{1}{2}(x^2-2\,x\,y+y^2)+z^2-2\,z+1 = \frac{1}{2}(x^2+2\,x\,y+y^2)+z^2+2\,z+1$

يكافئ $-x\,y-2\,z = x\,y+2\,z$

يكافئ $0 = x\,y+2\,z+x\,y+2\,z$

يكافئ $2\,x\,y+4\,z=0$

يكافئ $x\,y+2\,z=0$ و هو المطلوب

c) المستويات العمودية على (AB) لها $\overrightarrow{AB}$ كشعاع ناظمي

أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-1-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$

منه : كل مستوي عمودي على (AB) له الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ناظمي له لأن $\vec{n}\,//\,\overrightarrow{AB}$

إذن : المستويات العمودية على (AB) لها المعادلة الديكارتية التالية : $0\,x+0\,y+z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

أي بصفة عامة فإن كل مستوي عمودي على (AB) له المعادلة $z=m$ حيث $m\in IR$ (بوضع $m=-\alpha$)

لنبحث إذن عن تقاطع Σ و المستويات ذات المعادلة $z=m$ كمايلي :

$\begin{cases}x\,y+2\,z=0\\z=m\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x\,y+2\,m=0\\z=m\end{cases}$

يكافئ $(I)\begin{cases}x\,y=-2\,m\\z=m\end{cases}$

نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $m=0$

الجملة (I) تكافئ $\begin{cases}x\,y=0\\z=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x=0\\y\in IR\\z=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=0\\x\in IR\\z=0\end{cases}$

إذن : التقاطع هو اتحاد مستقيمين تمثيلاهما الوسيطيين كمايلي :

$\begin{cases}x=0\\y\in IR\\z=0\end{cases}$ و $\begin{cases}y=0\\x\in IR\\z=0\end{cases}$ (هما محوري الفواصل و التراتيب)

الحالة (2) $m\neq 0$

الجملة (I) تكافئ $\begin{cases} y = \dfrac{-2m}{x} \\ z = m \end{cases}$

إذن : التقاطع هو المنحنى ذو المعادلة $y = \dfrac{-2m}{x}$ في المستوي الذي معادلته $z = m$ (قطع زائد)

c) ليكن (π) مستوي عمودي على المحور $(o ; \vec{i})$ إذن : (π) له المعادلة $x = m$

$\begin{cases} xy + 2z = 0 \\ x = m \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} my + 2z = 0 \\ x = m \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = \dfrac{-m}{2}y \\ x = m \end{cases}$

إذن : $\Sigma \cap (\pi)$ هو المنحنى ذو المعادلة $z = \dfrac{-m}{2}y$ في المستوي (π) (هو مستقيم من المستوي (π))

ليكن (Q) مستوي عمودي على المحور $(o ; \vec{j})$ إذن : (Q) له المعادلة $y = m$

$\begin{cases} xy + 2z = 0 \\ y = m \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} mx + 2z = 0 \\ y = m \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = \dfrac{-m}{2}x \\ y = m \end{cases}$

إذن : $\Sigma \cap (Q)$ هو المنحنى ذو المعادلة $z = \dfrac{-m}{2}x$ في المستوي (Q) (مستقيم من المستوي (Q))

التمرين ــ 19

OABC رباعي وجوه حيث $OA = OB = OC = a$ مع a عدد حقيقي موجب تماما و الوجوه الثلاثة OAB ؛ OAC ؛ OBC هي مثلثات قائمة في النقطة O

لتكن M نقطة من [OA] حيث $AM = x$

نسمي (π) المستوي الذي يشمل M و يوازي المستقيمين (AB) و (OC) و يقطع المستقيمات (AC) ، (CB) ، (OB) على الترتيب في النقط N ؛ P ؛ Q

1 ــ برهن أن الرباعي MNPQ مستطيل .

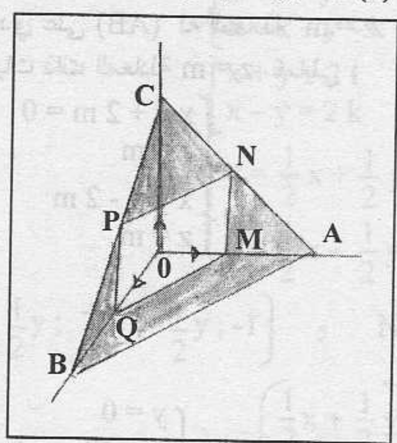
2 ــ أحسب بدلالة x المساحة A(x) للمستطيل MNPQ

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = A(x)$ و مثل منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ للمستوي .

4 ــ من أجل أي قيمة لـ x تكون المساحة A(x) أكبر ما يمكن ؟

الحـل ــ 19

الانشاء :



ننسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ محاوره (OA) ، (OB) و (OC) حيث $\|\vec{i}\| = 1$

بما أن $AM = x$ و $OA = a$ فإن احداثيات النقط M و Q هي $M(a-x ; 0 ; 0)$ ؛ $Q(0 ; a-x ; 0)$

و احداثيات النقط A ، B ، C هي $A(a ; 0 ; 0)$ ؛ $B(0 ; a ; 0)$ ؛ $C(0 ; 0 ; a)$

1 ــ لنبحث عن احداثيات كل من N و P كمايلي :

N هي تقاطع (AC) و (MN)

P هي نقطة تقاطع (BC) و (PQ)

إذن : يكفي ايجاد معادلة كل من (AC) ، (BC) ، (MN) ، (PQ)

معادلة (MN)

$\overrightarrow{OC}$ شعاع توجيه لـــ (MN) إذن $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\vec{k}$ هو شعاع توجيه لـــ (MN)

و $M(a-x\,;0\,;0)$ نقطة من (MN) إذن التمثيل الوسيطي لـــ المستقيم (MN) هو : $\begin{cases}X-(a-x)=0\\Y-0=0\\Z-0=t\end{cases}$

أي $\begin{cases}X=a-x\\Y=0\\Z=t\end{cases}$ حيث $t\in IR$

معادلة (PQ)

$\overrightarrow{OC}$ شعاع توجيه لـــ (PQ) إذن $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\vec{k}$ هو شعاع توجيه لـــ (PQ)

و $Q(0\,;a-x\,;0)$ نقطة من (PQ) :

إذن : $\begin{cases}X-0=0\\Y-(a-x)=0\\Z-0=k\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=0\\Y=a-x\\Z=k\end{cases}$ حيث $k\in IR$

معادلة (AC)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-a\\0-0\\a-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AC)

(AC) يشمل النقطة $A(a\,;0\,;0)$ إذن :

$\begin{cases}X-a=-a\,m\\Y-0=0\\Z-0=a\,m\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=a-a\,m\\Y=0\\Z=a\,m\end{cases}$ حيث $m\in IR$

معادلة (BC)

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-0\\0-a\\a-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-a\\a\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (BC)

(BC) يشمل $B(0\,;a\,;0)$

إذن : $\begin{cases}X-0=0\\Y-a=-a\,q\\Z-0=a\,q\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=0\\Y=a-a\,q\\Z=a\,q\end{cases}$ حيث $q\in IR$

البحث عن N حيث N هي $(AC)\cap(MN)$:

$\begin{cases}a-x=a-a\,m\\Y=0\\t=a\,m\end{cases}$ منه $\begin{cases}-x=-a\,m\\Y=0\\t=a\,m\end{cases}$ ،

أي $\begin{cases}m=x/a\\Y=0\\t=a(x/a)=x\end{cases}$

نتيجة : بتعويض t بـــ x في التمثيل الوسيطي لـــ (MN)

نحصل على $\begin{cases}X=a-x\\Y=0\\Z=x\end{cases}$

منه : $N(a-x\,;0\,;x)$

البحث عن احداثيات P حيث P هي $(BC)\cap(PQ)$:

$\begin{cases}X=0\\a-a\,q=a-x\\a\,q=k\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=0\\a\,q=x\\a\,q=k\end{cases}$

أي $\begin{cases} X = 0 \\ q = x/a \\ k = a(x/a) = x \end{cases}$

بتعويض k بـ x في التمثيل الوسيطي لـ (PQ) نحصل على :

$\begin{cases} X = 0 \\ Y = a - x \\ Z = x \end{cases}$ منه $P(0 ; a - x ; x)$

نتيجة : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} a-x-(a-x) \\ 0-0 \\ x-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix} 0-0 \\ a-x-(a-x) \\ x-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} a-x-0 \\ 0-(a-x) \\ 0-0 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QM}\begin{pmatrix} a-x-0 \\ 0-(a-x) \\ 0-0 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{QM}\begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$

لدينا $\overrightarrow{PN} . \overrightarrow{MN} = 0(a-x) + 0(x-a) + x(0) = 0$

إذن : $\overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{MN}$ متعامدان .

خلاصة : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$ و $\overrightarrow{PN}$ عمودي على $\overrightarrow{MN}$ إذن الرباعي MNPQ مستطيل .

2 ــ $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix}$ إذن : $PN = \sqrt{(a-x)^2 + (x-a)^2 + 0}$

$= \sqrt{2(a-x)^2}$

$= |a-x|\sqrt{2}$

$= (a-x)\sqrt{2}$ لأن $a > x$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ إذن : $MN = \sqrt{0 + 0 + x^2} = |x| = x$

نتيجة : $A(x) = PN \times MN = x(a-x)\sqrt{2}$ مقدر بوحدة القياس .

3 ــ $f(x) = A(x)$ يكافئ $f(x) = x(a-x)\sqrt{2}$

يكافئ $f(x) = a\,x\sqrt{2} - x^2\sqrt{2}$

بما أن M نقطة من القطعة المستقيمة [OA] فإن $0 \le x \le a$.

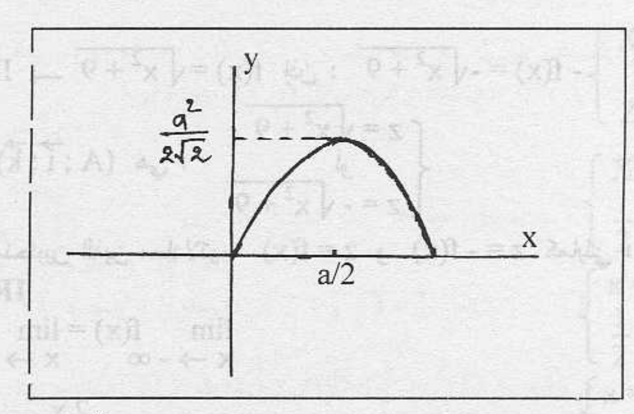
إذن : ندرس تغيرات الدالة f على المجال [0 ; a] كمايلي :

$f(0) = 0$ ؛ $f(a) = 0$

$f'(x) = a\sqrt{2} - 2x\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - 2x)$

x	0		a/2		a
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$	↘	0

$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$



4 ـ تكون المساحة $A(x)$ أكبر ما يمكن من أجل $x = a/2$ و قيمتها عندئذ هي $A(x) = \dfrac{a^2}{2\sqrt{2}}$ مقدرة بوحدة القياس .

التمرين ـ 20

ليكن (C) سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = z^2$

1 ـ بين أن المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}\, t \\ z = 2\,t \end{cases}$ هو مستقيم مولد لـ (C)

2 ـ ليكن (π) المستوي الدي معادلته $y = 3$

نسمي (H) تقاطع (C) مع المستوي (π)

لتكن A النقطة ذات الاحداثيات $(0 ; 3 ; 0)$

a) أكتب في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$ معادلة (H)

b) بين أن توجد دالة f بحيث يكون (H) هو اتحاد المنحنيين اللذين معادلاتهما $z = f(x)$ و $z = -f(x)$ ثم مثل (H) في المستوي (π)

c) ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases}$

بين أن إذا كانت $M(x ; z)$ في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$ فإن : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{x - z}{2}\vec{u} + \dfrac{x + z}{2}\vec{v}$

d) لتكن $M(X ; Z)$ في المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$

أثبت أن $M \in (H)$ معناه $XZ = -9/4$

الحـل ـ 20

1 ـ لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من (D) إذن $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}\, t \\ z = 2\,t \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = t^2 + (\sqrt{3}\, t)^2$

أي $x^2 + y^2 = t^2 + 3\,t^2$

أي $x^2 + y^2 = 4\,t^2$

أي $x^2 + y^2 = (2\,t)^2$

أي $x^2 + y^2 = z^2$

أي M تنتمي إلى (C)

نتيجة : المستقيم (D) محتواة في (C) إذن : (D) هو مولد لـ (C)

2 ـ a) لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من H

إذن : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + 9 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$

إذن : معادلة (H) في المستوي (π) ذو المعادلة $y = 3$ هي $z^2 = x^2 + 9$ في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$

b) لتكن المعادلة $z^2 = x^2 + 9$ في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$

$z^2 = x^2 + 9$ يكافئ $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 9} \\ \text{أو} \\ z = -\sqrt{x^2 + 9} \end{cases}$

نعرف الدالة f على IR بـــ $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ إذن : $-f(x)=-\sqrt{x^2+9}$

معادلة (H) في المعلم $(A;\vec{i};\vec{k})$ هي : $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+9} \\ \text{أو} \\ z=-\sqrt{x^2+9} \end{cases}$

إذن : (H) هو اتحاد المنحنيين الذين معادلاتهما $z=f(x)$ و $z=-f(x)$ كمايلي :

تغيرات الدالة f على IR

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

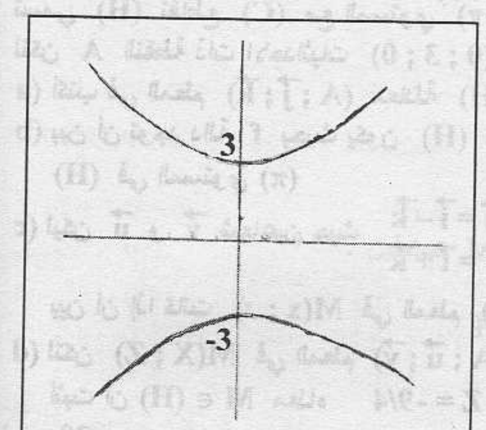
$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$$f(0)=\sqrt{0+9}=3$$

منه المنحنى (H) كمايلي :



c) $\begin{cases}\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}\\ \vec{v}=\vec{i}+\vec{k}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}\\ \vec{k}=\vec{v}-\vec{i}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\\ \vec{k}=\vec{v}-\vec{i}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\\ \vec{k}=\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\\ \vec{k}=\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}\end{cases}$

$M(x;z)$ في المعلم $(A;\vec{i};\vec{k})$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=x\vec{i}+z\vec{k}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=x\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)+z\left(\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}\right)$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}x\vec{u}+\frac{1}{2}x\vec{v}+\frac{1}{2}z\vec{v}-\frac{1}{2}z\vec{u}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(x-z)\vec{u}+\frac{1}{2}(x+z)\vec{v}$

يكافئ $(\alpha)\ .....\ \overrightarrow{AM}=\frac{x-z}{2}\vec{u}+\frac{x+z}{2}\vec{v}$

d) $M(X;Z)$ في المعلم $(A;\vec{u};\vec{v})$ أي $\overrightarrow{AM}=X\vec{u}+Z\vec{v}$

بالمطابقة مع العبارة (α) نحصل على : $\begin{cases}X=\frac{x-z}{2}\\ Z=\frac{x+z}{2}\end{cases}$

أي : $\begin{cases} X = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ Z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases}$

أي $\begin{cases} X + Z = x \\ \frac{1}{2}z = Z - \frac{1}{2}x \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = X + Z \\ \frac{1}{2}z = Z - \frac{1}{2}(X + Z) \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = X + Z \\ z = 2Z - X - Z \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = X + Z \\ z = Z - X \end{cases}$

نتيجة :

$M(X ; Y)$ تنتمي إلى (H) يكافئ $z^2 = x^2 + 9$

يكافئ $(Z - X)^2 = (X + Z)^2 + 9$

يكافئ $Z^2 - 2ZX + X^2 = X^2 + 2ZX + Z^2 + 9$

يكافئ $-2ZX = 2ZX + 9$

يكافئ $-4ZX = 9$

يكافئ $XZ = -9/4$ و هو المطلوب

التمرين – 21

f دالة معرفة بـ $f(x ; y) = \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2}$

(S) هي المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

أدرس تقاطع (S) مع المستويات التي معادلاتها $z = 0$ ثم $z = 1$

الحـل – 21

ليكن (π) المستوي الذي معدلته $z = 0$

$\begin{cases} z = \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} \\ z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = -1/2 \\ z = 0 \end{cases}$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = -1/2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z = 1$

$\begin{cases} z = \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} \\ z = 1 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 = 4x + 2 \\ z = 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

إذن : $(P) \cap (S)$ هو الدائرة التي مركزها $(1 ; 0 ; 2)$ و نصف قطرها 2 من المستوي (P) ذو المعادلة $z = 1$

التمرين – 22

(T) مساحة معادلتها $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2$

اختر الاقتراح الصحيح من بين مايلي :

a) $C(1 ; 1 ; -2)$ تنتمي الى (T)

b) (T) هو سطح مخروط دوراني محوره $(o ; \vec{j})$

c) المستقيم (D) الذي يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ مولد لـ (T)

الحل – 22

a) نعوض احداثيات النقطة C في معادلة (T) كمايلي : $(1)^2 + (1)^2 = \frac{1}{2}(-2)^2$ أي $2 = 2$

منه معادلة (T) محققة إذن C فعلا تنتمي إلى (T)

b) $(o ; \vec{j})$ ليس محور لـ (T)

c) هل (d) مولد لـ (T)

$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

(D) يشمل O و $\vec{u}$ شعاع توجيه له إذن : (D) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

منه إذا كانت $M(x ; y ; z)$ نقطة من (D) فان :

$x^2 + y^2 = t^2 + t^2 = 2t^2$

من جهة أخرى $\frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2}(2t)^2 = \frac{4t^2}{2} = 2t^2$

إذن : $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2$

منه : M تنتمي إلى (T)

إذن : (D) محتواة في (T)

أي (D) مولد لـ (T) إذن الاقتراح c) صحيح

التمرين – 23

(R) مساحة معادلتها $z = 2x + 0,5y^2 + 4$

هل تقاطع (R) مع المستوي ذو المعادلة $y = 0$ هو :

a) قطع مكافئ   c) قطع زائد

b) مستقيم   d) جواب آخر

الحل – 23

$\begin{cases} z = 2x + 0,5y^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z = 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 2x = z - 4 \\ y = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} z - 2 \\ y = 0 \end{cases}$

إذن : تقاطع (R) مع المستوي ذو المعادلة $y = 0$ هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = \frac{1}{2} t - 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in R$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) مستقيم .

التمرين – 24

(π) هي مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $x - 3y = 5$

هل صحيح أن (π) ليست مساحة ؟

الحل – 24

$x - 3y = 5$ يكافئ $x - 3y - 5 = 0$ و هي معادلة مستوي يشمل النقطة $(1 ; -5/3 ; 0)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

إذن : (π) هو سطح مستو .

التمرين ـ 25

هل تقاطع مجسم مكافئ معادلته $z = x^2 + y^2$ مع سطح كرة مركزها O هو دائرة ؟

الحـل ـ 25

ليكن (R) المجسم المكافئ ذو المعادلة $z = x^2 + y^2$

نسمي (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α حيث $\alpha > 0$

إذن : معادلة (S) $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$

لنبحث عن تقاطع (S) و (P)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} z + z^2 = \alpha^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases} z^2 + z - \alpha^2 = 0 \text{.....} (1) \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) ذات المجهول z حيث $z \geq 0$ لأن $x^2 + y^2 \geq 0$

$$\Delta = 1 + 4\,\alpha^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \end{cases}$$ z_1 سالب إذن مرفوض .

نتيجة : (S) و (R) يتقاطعان في مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ حيث :

$$\begin{cases} z = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \end{cases}$$

و هي معادلة دائرة مركزها $\left(0 ; 0 ; \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2}\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2}}$

في المستوي ذو المعادلة $z = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2}$

نتيجة : الجواب صحيح .

التمرين ـ 26

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = 2\,x(y + 1)$ حيث $0 \leq x \leq 10$ ؛ $0 \leq y \leq 12$

هل النقطة $A(5 ; 11 ; 120)$ تنتمي إلى (S) ؟

الحـل ـ 26

$0 \leq 5 \leq 10$ و $0 \leq 11 \leq 12$ إذن : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$ محققة

من جهة أخرى :

$$2(5)(11 + 1) = 10(12) = 120$$

إذن : الشرط $2\,x(y + 1) = z$ محقق .

منه : A فعلا تنتمي إلى (S)